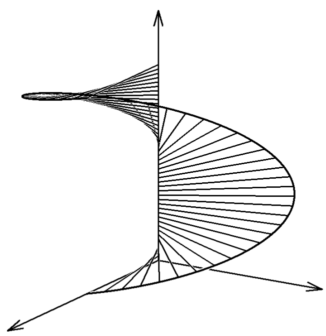
Matematická analýza IV.

Vladimír Souček a kol.



Vážení čitatelé a jmenovatelé různí od nuly,

těší nás, že jste se ani v letním semestru druhého ročníku nenechali zviklat teplým počasím a pokoušíte se věnovat matematice. Přáli bychom si, aby vám následující studijní text umožnil využít co nejúčinněji čas strávený v bludišti látky přednášky Matematika pro fyziky I, jmenovitě pak komplexní analýzy. Téměř bezvýhradně jsme se drželi hlavní linie přednášky a jen občas jsme k tomuto základu přidávali rozšiřující poznámky a komentáře, případně obzvláště užitečné či názorné příklady probírané na cvičeních. Oproti minulým semestrům jsme pro vás připravili nevídané množství vysvětlujících obrázků a v reakci na ohlasy veřejnosti jsme se snažili omezit úkoly a cvičení ponechaná čtenáři za domácí úkol a nahradit je řešenými příklady. Domníváme se, že rovněž oceníte často ne zcela formální zápis důkazů vět a že v případě krajní nutnosti byste byli schopni, po zkušenostech z předchozích třech semestrů, tento formální rámec v konečném čase dotvořit.

Předem se omlouváme za veškeré chyby v textu. Přestože jsme jednotlivé kapitoly vícekrát kontrolovali, je velmi pravděpodobné, že mohly zůstat opomenuty i některé významové chyby. Odhalení takových chyb může usnadnit život i následujícím generacím vašich kolegů a my vám za takové postřehy budeme velmi vděčni.

Všechno jednou končí, nyní končí i Matematika pro fyziky I. a my vám děkujeme za pozornost a vytrvalou přízeň. Přesto ale doufáme, že až jednou za mnoho let budete zase zaměňovat pořadí derivace a integrálu, zaleskne se vám slza v oku a neopomenete nalézt integrabilní majorantu.

Vaši autoři

Vladimír Souček, Jana Gřondilová, Daniel Král,
Svatopluk Krýsl, Dalibor Šmíd, Karel Výborný

12 Fourierovy řady

Seznámili jsme se již s možností zapsat některé funkce na daném intervalu pomocí nekonečné mocninné řady. Slovy lineární algebry to znamená, že prvek z určitého *podprostoru* všech funkcí jsme zapsali jako lineární kombinaci báze $\{1, x, x^2, \ldots\}$. Připustíme-li, že funkce může mít mocninnou řadu v různých bodech různou, pak oním podprostorem jsou reálně analytické funkce.

V předchozích kapitolách jsme zkonstruovali prostor $\mathscr{L}_2$, který má tu výhodu, že je úplný[1]. Sestrojíme jednu z jeho bází, od níž budeme žádat ještě další podmínku: ortogonalitu. Díky tomu pak bude možné pro danou funkci f počítat koeficienty u jednotlivých bázových funkcí obzvláště jednoduše.

Nejprve se budeme zabývat hledáním vhodných ortogonálních posloupností v $\mathscr{L}_2$. Poté vybudujeme teorii pro obecné Hilbertovy prostory, v níž uvážíme konvergenci ve smyslu normy na těchto prostorech. Nakonec se budeme zabývat bodovou konvergencí Fourierových řad na $\mathscr{L}_2$, tedy tím, do jaké míry si odpovídají funkční hodnoty původní funkce a její Fourierovy řady.

§1. Úplné ortonormální posloupnosti: definice a způsoby hledání

Definice 1: Ortogonální posloupnost, úplná posloupnost, separabilní prostor
Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem (a, b). Posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ nazveme *ortogonální*, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ e_n \neq 0 \qquad \text{a} \qquad (\forall m, n \in \mathbb{N})(n \neq m) \Rightarrow \big((e_n, e_m) = 0\big).$$

Pokud navíc $\forall n \in \mathbb{N}: \ (e_n, e_n) = 1$, mluvíme o *ortonormální* posloupnosti.

Posloupnost $\{e_n\} \subset \mathscr{H}$ je *úplná*, pokud platí

$$(\forall x \in \mathscr{H})\big[(\forall n \in \mathbb{N})\big((x, e_n) = 0\big) \Rightarrow (x = 0)\big].$$

Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ nazveme *separabilní*, pokud v něm existuje úplná ortonormální posloupnost.

Poznámka: Ortogonální posloupnost $\{e_n\}$ lze snadno normalizovat. Posloupnost $\{e_n/\|e_n\|\}$ je zřejmě ortonormální.

Pokud je dimenze $\mathscr{H}$ konečná, pak úplná ortonormální posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ tvoří ortonormální bázi $\mathscr{H}$ přesně v tom smyslu, jakým jsme ji již dříve definovali. Takovou posloupnost tvoří totiž nezávislé vektory. Platí totiž

$$0 = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(e_m, \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n\right) = \alpha_m \qquad \text{pro} \qquad m = 1, 2, \ldots, N.$$

Separabilní prostory se často definují i tak, že v nich existuje spočetná hustá podmnožina. Množinu $\mathrm{M} \subset \mathscr{H}$ nazýváme hustou, pokud

$$(\forall x \in \mathscr{H})(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathrm{M})(\|x - m\| < \varepsilon);$$

v případě $\overline{\mathrm{M}} = \mathscr{H}$ to znamená, že pomocí prvků množiny M husté v $\mathscr{H}$ se můžeme k libovolnému prvku z $\mathscr{H}$ přiblížit na libovolně malou vzdálenost. Toto je ekvivalentní definice separabilního prostoru, příslušnou větu ovšem dokazovat nebudeme.

Příklad: Bereme $\ell_2 = \big\{\{x_i\}_{i=1}^{\infty} |\ x_i \in \mathbb{C},\ \sum_i |x_i|^2 < \infty\big\}$ s obvyklým skalárním součinem $(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_i x_i \overline{y_i}$. Úplná ortonormální posloupnost[2] je například $\{a_i\}$, kde a_i má všude nuly, jen na i-tém místě jedničku.

Na druhou stranu existují i neseparabilní prostory. Uvažujme interval $A = \langle 0; 1\rangle$. Prostor H bude obsahovat všechny funkce $f : A \to \mathbb{C}$, které mají nenulové hodnoty v konečně mnoha bodech. Skalární součin v H lze definovat tím pádem takto: $(f, g) = \sum\limits_{x \in A} f(x)\overline{g(x)}$. Úplný ortonormální systém v H pakje $\{f_a\}$

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = a \\ 0 & \text{pro } x \neq a. \end{cases}$$

[1] Spolu s obvyklým skalárním součinem vytváří tedy Hilbertův prostor.
[2] To je samozřejmě posloupnost, jejímiž prvky jsou posloupnosti.

Tento systém je ovšem zřejmě nespočetný, neboť a musí probíhat celý interval A. Úplnou *posloupnost* tedy vytvořit nelze. Dodejme, že „na vině“ je způsob, jakým jsme zde definovali normu. Pokud bychom například užili klasickou lebesgueovskou normu, potíže by nenastaly; v prostoru H by ovšem pak byly samé „nulové“ funkce.

Poznámka: Později dokážeme, že každý separabilní Hilbertův prostor je izomorfní ℓ_2.

Příklad: Uveďme ještě příklady úplných ortonormálních posloupností v prostorech kvadraticky integrabilních funkcí na omezených intervalech. Ověřovat budeme pouze ortonormalitu, úplnost ponecháme bez důkazu.

1. Pro $\mathscr{L}_2\big((-\pi,\pi)\big)$ nad $\mathbb{C}$:
$$\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{1}$$
To, že indexy probíhají $\mathbb{Z}$ a nikoliv $\mathbb{N}$ zajisté nevadí, neboť obě množiny jsou spočetné (celá čísla lze seřadit do posloupnosti, například $0,1,-1,2,-2,3,\ldots$). Ukažme, že tato posloupnost je ortonormální (bereme $n,m\in\mathbb{Z}$, $n\neq m$):
$$\begin{aligned}(f_n,f_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\overline{f_m(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}e^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2\pi(n-m)i}\left(e^{i(n-m)\pi}-e^{-i(n-m)\pi}\right) = 0.\\ (f_n,f_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\overline{f_n(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}e^{0}\,\mathrm{d}t = 1.\end{aligned}$$
2. Pro $\mathscr{L}_2\big((-\pi,\pi)\big)$ nad $\mathbb{R}$:
$$\left\{\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2}$$
Ověření ortonormality provedeme na konci tohoto paragrafu.
3. Pro $\mathscr{L}\big((0,l)\big)$ nad $\mathbb{C}$:
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}e^{i2\pi nt/l}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{3}$$

Cvičení: Stejným postupem jako u (1) dokažte ortonormalitu systému (3).

V dalším vytvoříme aparát, který nám umožní hledat ortogonální posloupnosti jako vlastní vektory diferenciálních operátorů.

Definice 2: Skalární součin na $\mathscr{L}_2$ s váhou ϱ
Budiž $\mathrm{M}\subset\mathbb{R}_n$ a funkce $\varrho:\mathrm{M}\to\mathbb{R}$ spojitá a kladná na M. Definujeme prostor funkcí *kvadraticky integrabilních s váhou* ϱ
$$\mathscr{L}_{2,\varrho}(\mathrm{M}) = \big\{f\in\mathscr{M}(\mathrm{M})\big|\int_{\mathrm{M}}|f|^2\varrho<\infty\big\}.$$
Skalární součin na tomto prostoru definujeme analogicky
$$(f,g) = \int_{\mathrm{M}} f(t)\overline{g(t)}\varrho(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Věta 1: O prostoru $\mathscr{L}_{2,\varrho}(\mathrm{M})$
Prostor $\mathscr{L}_{2,\varrho}(\mathrm{M})$ je Hilbertův prostor.

Důkaz: Pro zadanou funkci ϱ zvolme prostor elementárních funkcí s kompaktním nosičem[3] na M takto:
$$\mathcal{H}_\varrho = \{f:\mathrm{M}\to\mathbb{C}\;\big|\;f\text{ spojitá}\},\qquad \int f \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{\mathrm{M}} f(x)\varrho(x)\,\mathrm{d}x.$$

[3] Funkcí, které jsou nenulové jen na kompaktní, tedy především omezené množině.

Body 1.–4. věty (8) z minulého semestru jsou pro toto $\mathcal{H}_\varrho$ splněny jednoduše, bod 5. dokážeme pomocí Lebesgueovy věty pro prostor $\mathscr{L}_1(\mathrm{M})$: pokud f_n na M bodově monotónně konverguje k nule, pak totéž platí pro funkci $f_n\varrho$, přičemž $f_1\varrho$ je pro tuto posloupnost konvergentní majoranta. Limita integrálů tedy bude rovna integrálu limity posloupnosti, což je identická nula. Tím pádem lze zaměnit pořadí limity a integrace, a tedy $\int f_n = \int_{\mathrm{M}} f_n(x)\varrho(x)\,\mathrm{d}x \to 0$.

Pak ovšem můžeme provést celou konstrukci Lebesgueova integrálu s těmito elementárními funkcemi — viz poznámku za větou (8) — z čehož vyplyne, že $\mathscr{L}_{2,\varrho}(\mathrm{M})$ je Hilbertův prostor.

Definice 3: Hermitovský operátor
Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor a $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ (takové zobrazení nazýváme *operátor*). Operátor A^+ nazveme *hermitovsky sdružený* s A, pokud pro každé $y, \widetilde{y} \in \mathscr{H}$ platí

$$(Ay, \widetilde{y}) = (y, A^+\widetilde{y}). \tag{5}$$

Pokud platí $A = A^+$ (rozuměj $Ay = A^+y$ pro každé $y \in \mathscr{H}$), nazveme A *hermitovský*.

Poznámka: S hermitovskými operátory jsme se již setkali v lineární algebře: zde byly reprezentovány symetrickými maticemi. Takové matice měly všechna vlastní čísla reálná a vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům navzájem kolmé. Stejné vlastnosti mají i operátory na $\mathscr{L}_2$, případně $\mathscr{L}_{2,\varrho}$, což dokážeme naprosto stejným postupem.

Definice 4: Vlastní čísla a vlastní vektory s vahou ϱ operátoru na $\mathscr{L}_{2,\varrho}$
Budiž $\varrho : \langle\alpha;\beta\rangle \to \mathbb{R}$ kladná spojitá funkce a A operátor na $\mathscr{L}_{2,\varrho}(\langle\alpha;\beta\rangle)$. Pokud pro nějaké $y \in \mathscr{L}_{2,\varrho}$ nenulové[4] a $\lambda \in \mathbb{C}$ je splněna rovnost funkcí

$$Ay = \lambda\varrho y, \tag{6}$$

pak λ nazveme *vlastním číslem* s vahou ϱ operátoru A a y *vlastním vektorem* s vahou ϱ operátoru A příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 2: Vlastní čísla a vlastní vektory hermitovských operátorů
Nechť ϱ a A splňují předpoklady předchozí definice. Pokud je navíc operátor A hermitovský, pak

1. všechna jeho vlastní čísla s vahou ϱ jsou reálná a
2. vlastní vektory odpovídající *různým* vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

Důkaz: Bod 1. Nechť $Ay = \lambda\varrho y$; protože ϱ je reálná, platí $\varrho = \overline{\varrho}$.

$$\begin{array}{l}(Ay, y) = (\lambda\varrho y, y) = \displaystyle\int \lambda y\overline{y}\varrho = \lambda\int |y|^2\varrho\\ \quad\;\|\\ (y, Ay) = (y, \lambda\varrho y) = \displaystyle\int y\overline{\lambda\varrho y} = \overline{\lambda}\int |y|^2\varrho.\end{array}$$

Celkem tedy $\lambda = \overline{\lambda}$, a tím pádem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bod 2. Nechť $Ay_1 = \lambda_1\varrho y_1$ a $Ay_2 = \lambda_2\varrho y_2$, $y_1, y_2 \neq 0$ (ve smyslu normy).

$$\begin{array}{l}(Ay_1, y_2) = (\lambda_1\varrho y_1, y_2) = \displaystyle\int \lambda_1\varrho\, y_1\overline{y_2} = \lambda_1\int y_1\overline{y_2}\varrho\\ \quad\;\|\\ (y_1, Ay_2) = (y_1, \lambda_2\varrho y_2) = \displaystyle\int y_1\overline{\lambda_2\varrho y_2} = \overline{\lambda_2}\int y_1\overline{y_2}\varrho.\end{array}$$

Z toho plyne, že musí být $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_2$ nebo $\int y_1\overline{y_2}\varrho = (y_1, y_2)_{\mathscr{L}_{2,\varrho}} = 0$.

Poznámka: Pozor! Hermitovský operátor definovaný pomocí $(Ay_1, y_2) = (y_1, Ay_2)$ používá skalární součin bez váhy. Vlastní vektory jsou ovšem „s váhou“ a kolmost ve druhé části věty jsme rovněž dokázali pro skalární součin s váhou (tj. v $\mathscr{L}_{2,\varrho}$).

[4] Tím myslíme $\|y\| \neq 0$.

Nyní naznačíme postup, který nám ve speciálních případech umožní pohodlněji poznat, zda je operátor A hermitovský. Zaměříme se na lineární diferenciální operátory druhého řádu.

Lemma o operátoru A:
Nechť $a \in C^1(\langle\alpha;\beta\rangle)$, $b \in C(\langle\alpha;\beta\rangle)$ a $X = C^2(\langle\alpha;\beta\rangle)$, všechny prostory se týkají funkcí $f : \langle\alpha;\beta\rangle \to \mathbb{R}$. Budiž A zobrazení

$$A : X \to C(\langle\alpha;\beta\rangle), \qquad y \mapsto Ay = ay'' + by' + cy. \tag{7}$$

Pokud $a' = b$ na $\langle\alpha;\beta\rangle$, pak pro $y, \widetilde{y} \in X$ platí

$$(Ay, \widetilde{y}) - (y, A\widetilde{y}) = \big[a(y'\widetilde{y} - y\widetilde{y}')\big]_\alpha^\beta. \tag{8}$$

Skalární součin (x, y) rozumíme na prostoru $\mathscr{L}_2(\langle\alpha;\beta\rangle)$.

Důkaz: Použijeme integrace per partes

$$(Ay, \widetilde{y}) - (y, A\widetilde{y}) = \int_\alpha^\beta \big[(ay'' + by' + cy)\widetilde{y}\big]\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \big[y(a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y})\big]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big[ay''\widetilde{y} + by'\widetilde{y} - a\widetilde{y}''y - b\widetilde{y}'y\big]\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \big[-y'(a\widetilde{y})' + by'\widetilde{y} + \widetilde{y}'(ay)' - b\widetilde{y}'y\big]\,\mathrm{d}t + \big[ay'\widetilde{y} - ay\widetilde{y}'\big]_\alpha^\beta =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big[-y'a'\widetilde{y} + by'\widetilde{y} + \widetilde{y}'a'y - b\widetilde{y}'y\big]\,\mathrm{d}t + \big[ay'\widetilde{y} - ay\widetilde{y}'\big]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (b - a')(y'\widetilde{y} - y\widetilde{y}')\,\mathrm{d}t + \big[ay'\widetilde{y} - ay\widetilde{y}'\big]_\alpha^\beta.$$

Integrál v posledním členu je vzhledem k $a' = b$ samozřejmě roven nule.

Poznámka: Pro $a' = b$ lze operátory A z lemmatu zapsat i ve tvaru

$$Ay = (ay')' + cy.$$

Jaké tedy máme obecně možnosti pro hledání ortonormálních posloupností v zadaném separabilním Hilbertově prostoru? Nejpřímější způsob je vybrat vhodnou úplnou posloupnost a provést Gramm–Schmidtův ortogonalizační proces.

Příklad: Pomocí Gramm–Schmidtovy ortogonalizace převeďme posloupnost funkcí $\{f_n\} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ na ortogonální systém na intervalu $\langle -1; 1\rangle$.

Prvky vytvářené ortogonální posloupnosti označíme g_n:

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = f_2 + \lambda g_1, \qquad 0 = (g_2, g_1) = \int_{-1}^1 (x + \lambda)\,\mathrm{d}x = 2\lambda$$

$$g_2 = x \qquad \lambda = 0$$

$$g_3 = f_3 + \lambda_2 g_2 + \lambda_1 g_1, \quad 0 = (g_3, g_1) = (f_3, g_1) + \lambda_1 (g_1, g_1) = \int_{-1}^1 (x^2 + \lambda_1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + 2\lambda_1$$

$$0 = (g_3, g_2) = (f_3, g_2) + \lambda_2 (g_2, g_2) = \int_{-1}^1 (x^3 + \lambda_2 x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\lambda_2$$

$$g_3 = x^2 - \frac{1}{3} \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{3},\ \lambda_2 = 0$$

Takto můžeme postupovat dále, složitost výpočtu samozřejmě roste s n.

Příklad: Normalizujme g_3.

$$\|g_3\|^2 = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left[x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right] \mathrm{d}x = \frac{8}{45}.$$

Odpovídající jednotkový vektor tedy bude

$$h_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

C v i č e n í: Vypočtěte a normalizujte g_4. $\left[g_4 = \sqrt{175/8}\cdot\left(t^3 - (3/5)t\right)\right]$

Jiná možnost jak konstruovat ortogonální systémy je hledat vlastní vektory hermitovských operátorů (tzv. Sturm–Liouvilleův problém). Uveďme několik příkladů; abychom ukázali, že operátory jsou skutečně hermitovské, použijeme lemma o operátoru A a ukážeme, že okrajový člen (8) je roven nule. Často toho ovšem dosáhneme pouze za cenu dalších požadavků na funkce $y, \widetilde{y}$. To ale nevadí, neboť věta (2) i tak zůstane v platnosti a nalezené vlastní vektory od různých vlastních čísel splňující tyto další požadavky budou ortogonální.

Některé operátory je třeba používat s váhovou funkcí ϱ, uvádíme je proto přímo ve tvaru (6).

1. $Ay = y'' = -\lambda y$ na intervalu $\langle d, d+l\rangle$ za podmínky $y(d) = y(d+l)$ a $y'(d) = y'(d+l)$. Protože v definičním vztahu (7) je $a \equiv 1$, má okrajový člen $y'(x)\widetilde{y}(x) - y(x)\widetilde{y}'(x)$ stejnou hodnotu v d i v $d+l$, rozdíl bude tedy nulový.
2. Hermite
$$\left(y'e^{-x^2/2}\right)' = -\lambda e^{-x^2/2}y, \qquad x \in (-\infty;\infty),$$
s podmínkou, že y i y' jsou v nekonečnech omezené.
3. Legendre
$$\left((1-x^2)y'\right)' = -\lambda(\lambda+1)y, \qquad x \in (-1;1),$$
opět s podmínkou omezenosti y, y' v ± 1.
4. Čebyšev
$$\left(y'\sqrt{1-x^2}\right)' = -\lambda^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y, \qquad x \in (-1;1),$$
s podmínkou jako u předchozího.
5. Laguerre
$$\left(y'xe^{-x}\right)' = -\lambda e^{-x}y, \qquad x \in (0;\infty)$$
s tím, že y je omezené v ∞ a okrajový člen (8) v 0 je nulový. V praxi to zajišťujeme tak, že zvolíme dvě pevné konstanty α, β a žádáme, aby $\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0$. Z toho již nulovost okrajového členu snadno odvodíte.

Ve všech případech kromě prvního a posledního byl koeficient a na krajích příslušného intervalu nulový, a tedy stačí požadovat, aby $y'(x)\widetilde{y}(x) - y(x)\widetilde{y}'(x)$ mělo konečnou hodnotu.

Jak se hledají potom vlastní vektory? Řešíme tyto diferenciální rovnice druhého řádu s určitými požadavky na řešení. Proto jsou také vlastní čísla výše psána v na první pohled zvláštních tvarech: zmíněné požadavky „navíc“ jsou splněny pouze, pokud ve všech těchto rovnicích je $\lambda \in \mathbb{Z}$.

P ř í k l a d: Vezměme první operátor. Víme, že obecné řešení uvedené diferenciální rovnice má tvar $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ pro $\lambda > 0$ a $y(x) = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x$ při $\lambda < 0$. Dále má v prvním případě platit

$$\begin{aligned} y(d) = y(d+l) \ &\Rightarrow\ c_1 + c_2 = c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} \\ y'(d) = y'(d+l) \ &\Rightarrow\ c_1 - c_2 = c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l}. \end{aligned}$$

To je regulární soustava lineárních rovnic pro c_1, c_2, která má tím pádem jediné řešení $c_1 = c_2 = 0$, což dává $y \equiv 0$ (stejné řešení dostaneme nakonec i pro $\lambda = 0$).

Ve druhém případě snadno ukážeme, že musí platit $\sqrt{\lambda} = 2\pi n/l$, $n \in \mathbb{Z}$. Víme, že obecné řešení lze alternativně napsat jako $y(x) = c\cos(\sqrt{\lambda}x + \delta)$. Funkce

$$y = c_1 \sin\frac{2\pi n}{l}x + c_2\cos\frac{2\pi n}{l}x$$

jsou tedy vlastními funkcemi operátoru $Ay = y''$ a podle vět tohoto paragrafu jsou ortogonální. Pokud volíme $l = 2\pi$ a $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, resp. naopak, zjistíme, že systém (2) je ortogonální. Funkce $y \equiv 1$ odpovídá volbě $n = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Příklad: Proveďme ještě normalizaci systému (2), resp. ukažme, že už je normalizován:

$$\left\| \sin \frac{2\pi n}{l} x \right\|^2 = \int_d^{d+l} \sin^2 \frac{2\pi n}{l} x \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Tento integrál sice můžeme spočítat přímo, ale můžeme si ušetřit námahu. Integrovaná funkce má zřejmě periodu l a hodnota integrálu se proto nezmění, pokud sinus nahradíme kosinem (obě funkce jsou oproti sobě pouze posunuté). Dále platí

$$\left\| \sin \frac{2\pi n}{l} x \right\|^2 + \left\| \cos \frac{2\pi n}{l} x \right\|^2 = \int_d^{d+l} 1 \,\mathrm{d}x = l,$$

pročež integrál (9) musí být roven $l/2$. Normalizační konstanta je tedy pro všechny siny a kosiny $\sqrt{2/l}$. Pro funkci $y \equiv 1$ je třeba výpočet provést zvlášť:

$$\|1\|^2 = \int_d^{d+l} 1 \,\mathrm{d}x = l.$$

Jedničku je proto třeba normalizovat $\sqrt{1/l}$. Celkem má příslušná ortonormální posloupnost na intervalu $\langle a; a+l \rangle$ tvar

$$\frac{1}{\sqrt{l}},\ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi n}{l} x,\ \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi n}{l} x. \tag{10}$$

Poznámka: Lze ověřit, že Legendrovu rovnici za požadavku omezenosti na krajích $(-1; 1)$ řeší systém

$$y_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \Big[(x^2-1)^n \Big].$$

Přesněji vlastnímu číslu $-n(n+1)$ odpovídá právě vlastní vektor y_n (a lze ukázat, že jiná na krajích $(-1; 1)$ omezená řešení Legendrova rovnice nemá).

Cvičení: Ověřte, že funkce g_1, g_2, g_3, g_4, které jsme výše získali Gramm–Schmidtovou ortogonalizací, jsou až na multiplikativní konstantu rovny y_0, y_1, y_2, y_3.

§2. Abstraktní Fourierovy řady: ortogonální projekce na podprostor, konvergence ve smyslu normy

V tomto paragrafu se budeme nejprve zabývat ortogonálními projekcemi na podprostory. Abstraktní Fourierovu řadu $y \in \mathscr{H}$ vzhledem k ortonormálnímu úplnému systému $\{y_n\}$ pak definujeme pomocí ortogonálních projekcí y na jednotlivé vektory y_n. Závěrem ukážeme paralelu mezi separabilními Hilbertovými prostory a prostorem ℓ_2.

Věta 3: O ortogonální projekci
Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor a $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{H}$ jeho uzavřený podprostor. Pak pro každé $x \in \mathscr{H}$ existuje právě jedno $x_0 \in \mathscr{P}$, pro které $\|x - x_0\| = \min_{y \in \mathscr{P}} \|x - y\|$. Tedy existuje zobrazení $\pi_{\mathscr{P}} : \mathscr{H} \to \mathscr{P}$, $x \mapsto x_0$, které nazveme *ortogonální projekce* $\mathscr{H}$ *na* $\mathscr{P}$. Toto zobrazení splňuje

1. $\mathrm{R}(\pi_{\mathscr{P}}) = \mathscr{P}$ (obor hodnot) a $\pi_{\mathscr{P}}^2 = \pi_{\mathscr{P}}$ (idempotence),
2. $\big(z = \pi_{\mathscr{P}}(x)\big) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathscr{P})\big((x - z, y) = 0\big)$,
3. $\|x\|^2 = \|x - \pi_{\mathscr{P}}(x)\|^2 + \|\pi_{\mathscr{P}}(x)\|^2$ (Pythagorova věta).

Poznámka: Podmínka na uzavřenost podprostoru $\mathscr{P}$ je důležitá (v důkazu ji využijeme). Pro připomenutí dodejme, že jedna z ekvivalentních definic uzavřenosti byla, že pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathscr{P}$, $x_n \to x \in \mathscr{H}$ platí $x \in \mathscr{P}$ — jelikož $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor, znamená to, že $\mathscr{P}$ je úplný.
Jak vypadají uzavřené a neuzavřené podprostory $\mathscr{P}$?

1. $\mathscr{P} \subset \mathscr{H}$, $\dim \mathscr{P} < \infty$, pak $\mathscr{P}$ je uzavřený. Vezmeme v něm ortogonální bázi, složky vektoru x v této bázi ztotožníme vektory $\mathbb{R}_n$ (celkem $\mathscr{P} \simeq \mathbb{R}_n$). Pak zřejmě $(x_n \overset{\mathscr{P}}{\to} x) \Leftrightarrow (x_n \overset{\mathbb{R}_n}{\to} x)$ a o prostoru $\mathbb{R}_n$ víme, že je úplný (a tedy uzavřený).

2. $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2\big((a,b)\big)$. Pro $\mathscr{P} = C(\langle a;b\rangle)$ platí $\mathscr{P} \neq \mathscr{H}$ a přitom $\overline{\mathscr{P}} = \mathscr{H}$ (uzávěr $\mathscr{P}$), tedy $\mathscr{P}$ není uzavřený. Není divu, již dříve jsme zjistili, že posloupnost spojitých funkcí nemusí mít spojitou limitu.
3. Zvolme $x_0 \in \mathscr{H}$ a položme $\mathscr{P}_{x_0} = \{y \in \mathscr{H} \mid (x_0, y) = 0\}$. Tento prostor je uzavřený, jak ukážeme v následujícím lemmatu.

Lemma o ortogonálním doplňku:
Nechť $x \in \mathscr{H}$ je pevný prvek. Zobrazení $\phi_x : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ (případně $\mathbb{C}$), $\phi_x : y \mapsto (x,y)$ je spojité a jeho jádro je uzavřený podprostor $\mathscr{H}$.

Pro $M \subset \mathscr{H}$ položme $M_\perp = \big\{y \in \mathscr{H} \mid (\forall x \in M)\big((x,y) = 0\big)\big\}$. $M_\perp$ je uzavřený podprostor.

Důkaz lemmatu: Spojitost dokážeme ze Schwarzovy[5] nerovnosti $|\phi_x(y)| = |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Pokud $\mathscr{H} \supset y_n \to y$, pak $\phi_x(y_n) \to \phi_x(y)$, neboť

$$|(x,y_n) - (x,y)| = |(x, y_n - y)| \leq \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0.$$

Pokud tedy pro nějakou posloupnost y_n platí $\phi_x(y_n) = (x, y_n) = 0$, tj. $y_n \subset \mathscr{P}_x$, pak i pro její limitu y musí být $\phi_x(y) = (x,y) = 0$. Uzavřenost $\mathscr{P}_x$ na sčítání a násobení číslem plyne triviálně z linearity skalárního součinu.

Nyní uvažujme, že v M je alespoň jeden prvek. Pak ovšem platí

$$M_\perp = \bigcap_{x \in M} \mathscr{P}_x$$

a průnik uzavřených podprostorů je uzavřený podprostor. Všechny úvahy jsou typu: a i b leží v $M_\perp$. Ať zvolíme jakýkoliv $\mathscr{P}_x$, $x \in M$, musí v něm ležet jak a, b tak $a + b$. Tím pádem $a + b$ leží v průniku všech $\mathscr{P}_x$, tj. v $M_\perp$.

Lemma (Pythagorova věta v $\mathscr{H}$):
Nechť $a, b \in \mathscr{H}$, $(a,b) = 0$. Pak

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Důkaz lemmatu:

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = (a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b) = \|a\|^2 + (a,b) + \overline{(a,b)} + \|b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Poznámka: Lze formulovat analogické tvrzení pro více vektorů: nechť $\{x_i\}_{i=1}^n$ je ortogonální množina. Pak

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Důkaz provedeme snadno matematickou indukcí z předchozího lemmatu. Bude $a = x_1 + \ldots + x_{n-1}$ a $b = x_n$.

Lemma (triviální rovnost s normami):
Pro každé $a, b \in \mathscr{H}$ platí

$$2\big(\|a\|^2 + \|b\|^2\big) = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2.$$

Důkaz lemmatu: Pamatujíce na $\|a\|^2 = (a,a)$, rozepíšeme pravou stranu

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = (a+b,a+b) + (a-b,a-b) = (a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b) + (a,a) - (a,b) - (b,a) + (b,b).$$

Důkaz věty: Nejprve je třeba ukázat existenci x_0. Označme $\delta = \inf_{y \in \mathscr{P}} \|x - y\|$. Podle definice infima tedy musí existovat posloupnost vektorů y_n z $\mathscr{P}$ takových, že $\|y_n - x\| \to \delta$. Dokážeme, že posloupnost y_n je cauchyovská. Použijeme „triviální rovnosti s normami" pro $a = y_n - x$, $b = y_m - x$ pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$. Člen $\|a - b\|^2$ ponecháme na jedné straně, ostatní přesuneme na druhou stranu.

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\big(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\big) - 4\Big\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\Big\|^2.$$

[5] Bývá označována i mnoha jinými jmény.

Protože $\mathscr{P}$ je vektorový prostor, leží v něm i vektor $(y_n + y_m)/2$. Protože δ je infimem vzdáleností x od prvků $\mathscr{P}$, můžeme druhý člen na pravé straně shora odhadnout $-4\delta^2$. Celkem tedy

$$\|y_n - y_m\|^2 \le 2\big(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\big) - 4\delta^2.$$

Konečně, pokud $n, m \to \infty$, konvergují obě normy na pravé straně k δ a celá takto odhadnutá pravá strana konverguje k nule. Norma $\|y_n - y_m\|$ tedy musí rovněž konvergovat k nule, z čehož již plyne cauchyovskost. Protože je ale prostor $\mathscr{P}$ uzavřený a $\mathscr{H}$ úplný, musí mít posloupnost y_n limitu $y \in \mathscr{P}$. Funkce $f(y) = \|x - y\|$ potom nabývá pro $y \in \mathscr{P}$ svého minima. Jednoznačnost výběru y dokážeme později.

Nyní postupme k vlastnostem zobrazení $\pi_{\mathscr{P}}$ (zatím jsme ovšem ještě nedokázali, že $\pi_{\mathscr{P}}$ zobrazení je).

1. Obě vlastnosti triviálně z definice: pro $x \in \mathscr{P}$ je zřejmě $\pi_{\mathscr{P}}(x) = x$.
2. Nejprve $\Rightarrow$. Budiž[6] $z = \pi_{\mathscr{P}}(x)$, y libovolný pevný vektor z $\mathscr{P}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Položme

   $$\phi(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} \|x - (z + \alpha y)\|^2 = (x - z - \alpha y, x - z - \alpha y) = \|x - z\|^2 - \alpha(y, x - z) - \alpha(x - z, y) + \alpha^2\|y\|^2.$$

   Protože vektory $z + \alpha y$ leží v $\mathscr{P}$, musí funkce ϕ nabývat minima pro $\alpha = 0$, a tedy $\phi'(0) = 0$:

   $$0 = 2\alpha\|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\big((y, x - z)\big)\Big|_{\alpha=0} \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\,\big((y, x - z)\big) = 0.$$

   Pokud v definici funkce ϕ doplníme před α imaginární jednotku i (proměnnou α podržíme reálnou), získáme podobně $i\,\mathrm{Im}\,\big((y, x - z)\big) = 0$. Celkem tedy $(y, x - z) = 0$.

   Nyní $\Leftarrow$. Nechť pro $z \in \mathscr{P}$ platí $(x - z, y) = 0$ pro každé $y \in \mathscr{P}$. Pak podle Pythagorovy věty

   $$\forall y \in \mathscr{P}:\ \|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 \ge \|x - z\|^2.$$

   Vzdálenost $\|x - y\|$ tedy pro $z = y$ nabývá svého minima, a tedy $z = \pi_{\mathscr{P}}(x)$.
3. Triviální důsledek 2. bodu. Víme, že $\pi_{\mathscr{P}}(x) \in \mathscr{P}$, a tedy $\pi_{\mathscr{P}}(x)$ je kolmé na $x - \pi_{\mathscr{P}}(x)$. Tvrzení tohoto bodu je pak výše zmíněná Pythagorova věta.

Vraťme se nyní k jednoznačnosti $\pi_{\mathscr{P}}(x)$. Nechť existují $x_1, x_2 \in \mathscr{P}$, $x_1 \neq x_2$, pro něž $f(y) = \|x - y\|$ nabývá svého minima. Podle bodu 2. pak platí

$$\forall y \in \mathscr{P}:\ (x - x_1, y) = 0,\ (x - x_2, y) = 0,\ \text{tudíž}\ (x_1 - x_2, y) = 0.$$

Volíme-li $y = x_1 - x_2$, dostáváme $\|x_1 - x_2\| = 0$, což je spor. Důkaz celé věty je tímto hotov.

Toto jsou základní vlastnosti ortogonálních projekcí na podprostory. Nejdůležitější z nich je přitom bod 2. Nyní již téměř „zadarmo“ dokážeme několik dalších užitečných vlastností zobrazení $\pi_{\mathscr{P}}$.

Věta 4: Další vlastnosti ortogonální projekce
Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor, $\mathscr{P} \subset \mathscr{H}$ jeho uzavřený podprostor a $\mathscr{Q} = \mathscr{P}_\perp$ [7]. Platí

1. $\mathscr{H} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$, tedy $(\forall x \in \mathscr{H})(\exists! y \in \mathscr{P})(\exists! z \in \mathscr{Q})(x = y + z)$.
2. $\forall x \in \mathscr{H}$ platí $x = \pi_{\mathscr{P}}(x) + \pi_{\mathscr{Q}}(x)$.
3. $\pi_{\mathscr{P}}, \pi_{\mathscr{Q}}$ jsou lineární zobrazení.
4. $\forall x \in \mathscr{H}$ je $\|x\|^2 = \|\pi_{\mathscr{P}}(x)\|^2 + \|\pi_{\mathscr{Q}}(x)\|^2$.

Důkaz:

1. Existence. Položme $y = \pi_{\mathscr{P}}(x)$, $z = x - \pi_{\mathscr{P}}(x)$, rovnost $y + z = x$ je zřejmá. Víme, že pro každé $a \in \mathscr{P}$ je $\big(x - \pi_{\mathscr{P}}(x), a\big) = 0$, proto $x - \pi_{\mathscr{P}}(x) \in \mathscr{P}_\perp = \mathscr{Q}$. Také ovšem $x - \big(x - \pi_{\mathscr{P}}(x)\big) = \pi_{\mathscr{P}}(x) \in \mathscr{P}$ je kolmý na všechny prvky z $\mathscr{Q}$, což podle předchozí věty znamená, že $x - \pi_{\mathscr{P}}(x) = \pi_{\mathscr{Q}}(x)$.

   Jednoznačnost. Průnik $\mathscr{P}$ a $\mathscr{Q}$ obsahuje jediný prvek, a to nulový vektor (nechť $x \in \mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$; pak x coby prvek $\mathscr{P}$ je kolmé na x coby prvek $\mathscr{Q}$, tedy $0 = (x, x) = \|x\|^2$). Nechť tedy $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, $y_1, y_2 \in \mathscr{P}$, $z_1, z_2 \in \mathscr{Q}$. Pak musí být $y_1 - y_2 = z_1 - z_2$. Levá strana patří do $\mathscr{P}$, pravá do $\mathscr{Q}$, díky rovnosti tedy $y_1 - y_2$ i $z_1 - z_2$ musí ležet v $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$, a být tudíž nulové vektory.

[6] Vzhledem k nedokázané jednoznačnosti je třeba z chápat jako jeden z prvků $\mathscr{P}$ s minimální vzdáleností od x.

2. Ukázali jsme již v předchozím bodě.
3. Ukažme nejprve, že pro každé $x \in \mathscr{H}$ je $\pi_{\mathscr{Q}} \circ \pi_{\mathscr{P}}(x) = 0$. To je ale zřejmé z bodů 1., 2. a bodu 1. věty předešlé.
$$\pi_{\mathscr{Q}}\big(\pi_{\mathscr{P}}(x)\big) = \pi_{\mathscr{P}}(x) - \pi_{\mathscr{P}}\big(\pi_{\mathscr{P}}(x)\big) = \pi_{\mathscr{P}}(x) - \pi_{\mathscr{P}}(x) = 0.$$
Buďte dále $x, y \in \mathscr{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
$$\pi_{\mathscr{P}}(\alpha x + \beta y) + \pi_{\mathscr{Q}}(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha\big(\pi_{\mathscr{P}}(x) + \pi_{\mathscr{Q}}(x)\big) + \beta\big(\pi_{\mathscr{P}}(y) + \pi_{\mathscr{Q}}(y)\big).$$
Pokud na rovnost aplikujeme zobrazení $\pi_{\mathscr{P}}$, resp. $\pi_{\mathscr{Q}}$, dostaneme
$$\pi_{\mathscr{P}}(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi_{\mathscr{P}}(x) + \beta\pi_{\mathscr{P}}(y), \qquad \pi_{\mathscr{Q}}(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi_{\mathscr{Q}}(x) + \beta\pi_{\mathscr{Q}}(y).$$
4. $\pi_{\mathscr{P}}(x)$ a $\pi_{\mathscr{Q}}(x)$ jsou na sebe kolmé, a tak lze použít Pythagorovu větu a bod 2. této věty.

Prozkoumali jsme vlastnosti ortogonálních projekcí, nevíme však, jak pro dané $x \in \mathscr{H}$ a $\mathscr{P} \subset \mathscr{H}$ spočítat $y = \pi_{\mathscr{P}}(x)$. Zaměříme se nyní na tuto otázku.

Věta 5: Ortogonální projekce na konečnědimenzionální podprostory
Budiž $\mathscr{P}$ konečnědimenzionální podprostor Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$. Zvolíme-li v $\mathscr{P}$ ortonormální bázi $\{u_i\}_{i=1}^n$, pak pro libovolný x z $\mathscr{H}$ je
$$\pi_{\mathscr{P}}(x) = \sum_{i=1}^{n}(x, u_i)u_i. \tag{11}$$

Důkaz: Protože $\pi_{\mathscr{P}}(x) \in \mathscr{P}$, musí existovat čísla α_i $(i = 1, \ldots, n)$ tak, že $\pi_{\mathscr{P}}(x) = \sum_i \alpha_i u_i$. Pro libovolné $u_j \in \mathscr{P}$ pak ale podle 2. bodu věty (3) musí platit
$$0 = \big(x - \pi_{\mathscr{P}}(x), u_j\big) = (x, u_j) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(u_i, u_j) = (x, u_j) - \alpha_j(u_j, u_j).$$
Tím pádem $\alpha_j = (x, u_j)$ pro $j = 1, \ldots, n$.

Vztah (11) samozřejmě láká ke zobecnění i pro nekonečné dimenze. Při tomto zobecnění už ale vystávají nové problémy. Prvním z nich je existence součtu příslušné řady.

Definice 5: Fourierova řada
Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor, $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{H}$ ortonormální posloupnost. Pro libovolné $x \in \mathscr{H}$ nazýváme
$$\sum_{n=1}^{\infty}(x, y_n)y_n \tag{12}$$
Fourierovou řadou prvku x vzhledem k $\{y_n\}$.

Věta 6: Riesz–Fischerova (podruhé)
Buďte $\mathscr{H}$ Hilbertův prostor, $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{H}$ ortonormální posloupnost a $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_2$ (kvadraticky konvergentní posloupnost čísel). Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ konverguje v $\mathscr{H}$, a pokud y je její součet, je i Fourierovou řadou y vzhledem k $\{y_n\}$.

Důkaz: $\alpha \in \ell_2$, tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ konverguje. Podle Bolzano–Cauchyho věty tím pádem $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})$ $(\forall n_0, k \in \mathbb{N},\ n_0 > m)$ platí
$$\varepsilon > \sum_{n=n_0}^{n_0+k} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=n_0}^{n_0+k} |\alpha_n|^2 \|y_n\|^2 = \Big\| \sum_{n=n_0}^{n_0+k} \alpha_n y_n \Big\|^2.$$
Využili jsme Pythagorovy věty (poznámky za lemmatem). Řada $\sum_n \alpha_n y_n$ je takto cauchyovská, a díky úplnosti $\mathscr{H}$ konvergentní.

Dále budiž x její součet. Označme

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n y_n, \text{ čímž } s_k \to x.$$

Pak pro každé y_j platí $\phi_{y_j}(s_k) \stackrel{\text{df}}{=} (s_k, y_j) = \alpha_j$ pro všechna $k \geq j$. Protože ϕ_{y_j} je spojitá funkce dle lemmatu za větou (3), lze pro tuto rovnost pohodlně spočítat limitu při $k \to \infty$: $(x, y_j) = \alpha_j$, což bylo dokázati.

Věta 7: Besselova nerovnost
Berme $\mathscr{H}$ Hilbertův prostor a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ ortonormální posloupnost. Potom pro každé $x \in \mathscr{H}$

1. Platí nerovnost
$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, y_n)|^2 \leq \|x\|^2. \tag{13}$$
2. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, y_n) y_m$ konverguje v $\mathscr{H}$.

Důkaz: Volme nejprve $n \in \mathbb{N}$ pevné. Prostor $\mathscr{P}$ budiž lineární obal vektorů $y_1, \ldots, y_n$. Podle poznámky za lemmatem o Pythagorově větě a vět (5) a (4) potom

$$\pi_{\mathscr{P}}(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, y_k) y_k \;\Rightarrow\; \|x\|^2 = \left\|x - \pi_{\mathscr{P}}(x)\right\|^2 + \left\|\pi_{\mathscr{P}}(x)\right\|^2 \geq \left\|\pi_{\mathscr{P}}(x)\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x, y_k)|^2.$$

Pokud nyní provedeme limitní přechod v nerovnosti $n \to \infty$, dostáváme požadované tvrzení.

Druhé tvrzení pak plyne z prvního pomocí Riesz–Fischerovy věty, v níž bereme $\alpha_i = (x, y_i)$.

Věta 8: Besselova rovnost
Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ ortonormální posloupnost. Následující tři výroky jsou ekvivalentní.

1. $\{y_n\}$ je úplná v $\mathscr{H}$,
2. $\forall x \in \mathscr{H}$ platí ve smyslu normy $x = \sum_n (x, y_n) y_n$,
3. $\forall x \in \mathscr{H}$ je splněna Besselova rovnost $\|x\|^2 = \sum_n |(x, y_n)|^2$.

Důkaz: 1.⇒2. Nechť $\sum_n (x, y_n) y_n$ konverguje k $z \in \mathscr{H}$. Pak pro každé y_m je

$$(z, y_m) = \Big(\sum_n (x, y_n) y_n, y_m\Big) = \sum_n (x, y_n)(y_n, y_m) = (x, y_m)(y_m, y_m) = (x, y_m).$$

Úplně korektní postup by se provedl stejně jako u druhé části Riesz–Fischerovy věty. Pokud by byla suma nekonečná, nahradili bychom ji částečným součtem s_k, $k \geq m$, čímž bychom získali $(s_k, y_m) = (x, y_m)$ a díky spojitosti skalárního součinu při $k \to \infty$ i $(z, y_m) = (x, y_m)$. Závěrem $(z - x, y_m) = 0$ pro každé y_m, a díky úplnosti $z - x = 0$, tedy $z = x$.

2.⇒3. Berme nejprve $n \in \mathbb{N}$ pevně. Z Pythagorovy věty pak

$$\|x\|^2 = \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, y_k) y_k\Big\|^2 + \Big\|\sum_{k=1}^{n} (x, y_k) y_k\Big\|^2.$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ se první člen na pravé straně podle předpokladu blíží k nule.

3.⇒1. Pokud pro nějaké $y \in \mathscr{H}$ platí $(y, y_n) = 0$ pro každé y_n, pak musí být

$$\|y\|^2 = \sum_n |(y, y_n)|^2 = 0,$$

a tím pádem dle definice normy i $y = 0$ (ve smyslu třídové rovnosti na $\mathscr{L}_2/\sim$).

P o z n á m k a : Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi dvěma prostory, které zachovává normu se obecně nazývá izometrie. V důkazu další věty ukážeme, že vlastnosti „zachovávat normu“ a „zachovávat skalární součin“ jsou ekvivalentní (pokud samozřejmě skalární součin indukuje tuto normu).

Věta 9: Parsevalova rovnost
Budiž $\mathscr{H}$ Hilbertův prostor, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ úplná ortonormální posloupnost a x prvek z $\mathscr{H}$. Označme $\widehat{x}_n = (x, y_n)$, $\widehat{x} = \{\widehat{x}_n\} \in \ell_2$ pro $n = 1, 2, \ldots$

1. Platí Parsevalova rovnost $(x,y)_{\mathscr{H}} = (\hat{x}, \hat{y})_{\ell_2}$ pro každé dva prvky x, y z $\mathscr{H}$.
2. Všechny separabilní Hilbertovy prostory jsou izomorfní ℓ_2, a tedy izomorfní navzájem.

Důkaz: 1. Využijeme rovnosti

$$\frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) = \frac{1}{2}\big((x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) - (x,x) - (y,y)\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\big((x,y) + \overline{(x,y)}\big) = \operatorname{Re}\big((x,y)\big).$$

Reálnou část skalárního součinu (x, y) tedy převedeme na součet norem, které se podle předchozí věty (Besselovy rovnosti) při přechodu $\mathscr{H} \to \ell_2$ zachovávají. Potom normy opět složíme do reálné části skalárního součinu, nyní ale již v ℓ_2. Pro ověření rovností imaginárních části ve výšeuvedené rovnosti nahradíme vektor y vektorem iy.

Druhá část věty je tím pádem zřejmá. V separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ lze zvolit úplnou ortonormální posloupnost, a bude tedy podle Besselovy rovnosti existovat izometrie $\mathscr{H} \leftrightarrow \ell_2$.

§3. Bodová konvergence Fourierových řad: příklady výpočtu Fourierových řad

Zatím jsme mluvili o Fourierových řadách pouze obecně. Klasicky se na místě ortogonální úplné posloupnosti v $\mathscr{L}_2$ používá systém (2) nebo (1). Také si povšimněme, že doposud jsme o konvergenci Fourierových řad mluvili pouze ve smyslu normy v $\mathscr{L}_2$. Takto se ale „shodují“ funkce, jejichž hodnoty se liší na množině míry nula[8]. Je možné říci něco bližšího o funkčních hodnotách součtů Fourierových řad?

Věta 10: Parsevalova
Trigonometrický systém (2) a (1) jsou úplné posloupnosti.

Důkaz: Lze nalézt v Kopáčkových skriptech (díl 4., paragraf 3. a 5.).

Jak se tedy počítají Fourierovy řady podle těchto systémů? Zaměříme se pouze na periodické funkce. Pokud vyšetřujeme funkci na omezeném intervalu $(a, a+l)$, můžeme ji samozřejmě na zbytku $(-\infty, \infty)$ periodicky doplnit. Uvažujme funkci $f \in \mathscr{L}_2\big((a, a+l)\big)$; její Fourierova řada podle trigonometrického systému je pak z definice

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{l} x.$$

Koeficienty dostaneme výpočtem skalárních součinů f se siny, kosiny a jedničkou coby členy trigonometrického systému. Nultý člen odpovídající bázové funkci $y \equiv 1$ píšeme s faktorem $1/2$, abychom mohli psát vztah pro koeficienty a_n, b_n v jednotném tvaru pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \frac{2\pi n}{l} x \,\mathrm{d}x \tag{14}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \frac{2\pi n}{l} x \,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Koeficient $2/l$ odpovídá normalizaci: pokud bychom volili obecně ortogonální nenormalizovanou bázi $\{z_n\}$ přešli bychom k ortonormálnímu systému $\{z_n / \|z_n\|\}$. Vztah (12) by po dosazení $y_n = z_n$ byl

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x, \frac{z_n}{\|z_n\|}\right) \frac{z_n}{\|z_n\|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|z_n\|^2} (x, z_n) z_n. \tag{16}$$

[8] Speciální případ jsou funkce lišící se v konečně mnoha bodech nebo alespoň na spočetných množinách.

Normu uvedených sinů a kosinů ($\sqrt{l/2}$) jsme již spočítali na konci paragrafu o ortogonálních systémech.

Podobně v případě systému komplexních exponenciál bude Fourierova řada funkce f na $(a; a+l)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nx\pi/l}, \text{ kde } c_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)e^{-i2nx\pi/l}\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Minus v exponentu při výpočtu c_n plyne z komplexního sdružení při počítání skalárního součinu: $(u,v) = = \int u\overline{v}$.

P ř í k l a d : Spočítejme Fourierovu řadu pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle -2; 0) \\ x & \text{pro } x \in \langle 0; 2 \rangle \end{cases}$$

na jejím definičním oboru.

Rutinním dosazením do vzorců (14), (15).

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\cos\frac{\pi n}{2}x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{\pi n}{2}x\,\mathrm{d}x.$$

První integrál spočteme přímo

$$\Big[-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}x\Big]_{-2}^{0} = 0,$$

což lze rovněž vyčíst z grafu integrované funkce. Pro druhý integrál použijeme metody per partes.

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{\pi n}{2}x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{\pi n}x\sin\frac{\pi n}{2}x\Big]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{2}{\pi n}\Big)^2\cos\frac{\pi n}{2}x\Big]_0^2 = \frac{2}{(\pi n)^2}\big[\cos\pi n - 1\big].$$

Koeficienty a_n budou tedy pro n sudá rovny nule a pro n lichá potom $-4/(\pi n)^2$. Velmi podobně bychom pro koeficienty b_n dostali

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}\big[\cos\pi n + 1\big].$$

Poslední parametr (a_0) musíme spočítat zvlášť

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2.$$

Číslo $a_0/2$ zřejmě není nic jiného než střední hodnota funkce f na zkoumaném intervalu. Celou Fourierovu řadu tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(2k+1)x}{(2k+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\pi x}{k}. \tag{18}$$

Při počítání integrálů (14,15,17) je užitečné si uvědomit, že je-li f 2π-periodická, lze obě integrační meze zároveň posunout o libovolné konstanty, aniž by se změnila hodnota integrálu. Funkci f násobenou sinem nebo kosinem argumentu $nx \cdot 2\pi/l$ takto integrujeme vždy přes jednu celou periodu a nezáleží na tom, kde s integrováním začneme. Pro pohodlí často volíme integraci od $-l/2$ do $l/2$, případně od 0 do l.

První způsob má určité výhody. Pokud je například funkce f *lichá*, pak v (14) integrujeme funkci přes interval symetrický kolem nuly a integrál je tudíž roven automaticky nule (příspěvky $f(x) = -f(-x)$ se vyruší). Podobně pro f *sudou* vypadnou všechny členy b_n (15). Též to můžeme chápat tak, že lichá funkce má Fourierovu řadu z lichých funkcí (sinů) a naopak. Tato skutečnost nám umožní řešit následující příklady.

P ř í k l a d : Funkci $f(x) = e^x$ na intervalu $\langle 0; 1\rangle$ vyjádřete pomocí Fourierovy řady obsahující pouze kosiny.

Funkci doplníme na sudou tak, že ji na $\langle -1; 0)$ dodefinujeme předpisem $f(x) = f(-x)$. Pro zbylá reálná čísla ji periodicky doplníme. Dále již postupujeme opět rutinním způsobem.

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos \pi n x \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 e^x \cos \pi n x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

neboť integrujeme sudou funkci. Kosinus zapíšeme jako reálnou část komplexní exponenciály.

$$a_n = \operatorname{Re}\Big(\int_0^1 e^x e^{i\pi n x} \, \mathrm{d}x \Big) = \operatorname{Re}\Big(\int_0^1 e^{(1+i\pi n)x} \, \mathrm{d}x \Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{1+i\pi n} \big(e^{1+i\pi n} - 1 \big) \Big) =$$
$$\operatorname{Re}\Big(\frac{1}{1+\pi^2 n^2} \big(e(\cos n\pi + i \sin n\pi) - 1 \big)(1 - i\pi n) \Big) = \frac{e \cos \pi n - 1 + \pi n \sin \pi n}{1 + \pi^2 n^2}.$$

Protože je ale n celé, siny budou rovny nule

$$a_n = \frac{e \cos \pi n - 1}{1 + \pi^2 n^2}.$$

Z tohoto vzorce určíme i koeficient a_0. Obecný vzorec (14) lze použít i pro $n = 0$. Naproti tomu v minulém příkladě jsme při výpočtu a_n integrovali per partes a nebylo možno použít vztahu $\int \cos nx \, \mathrm{d}x = (1/n) \sin nx$ pro $n = 0$. Zde ale takové obtíže nenastávaly.

P ř í k l a d: Do třetice ještě ukažme, jak lze použít Besselovy (či Parsevalovy) rovnosti a Fourierových řad buď k výpočtu integrálu nebo k výpočtu nekonečné sumy, podle toho, co umíme vypočítat. Najděme nejprve Fourierovu řadu k $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $(-\pi; \pi)$. Funkce je lichá, tedy $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx = -\frac{2}{\pi n} \big[\cos nx \big]_0^{\pi}.$$

Pro n sudé bude $b_n = 0$, pro n liché $4/(\pi n)$. Fourierovu řadu lze tedy zapsat

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x = \sum_{k=0}^{\infty} 4 \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{2k+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(2k+1)x. \tag{19}$$

Parsevalova rovnost hovoří o rovnosti norem v $\mathscr{L}_2$ a ℓ_2 pro funkci f a posloupnost jejích koeficientů a_n, b_n. Normu f spočteme snadno

$$\|f\|^2_{\mathscr{L}_2} = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) \big)^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi.$$

Při počítání normy koeficientů Fourierovy řady f v ℓ_2 je třeba nezapomenout, že jsme mluvili o *ortonormálních* systémech. V posledním tvaru Fourierovy řady (19) je správná hodnota koeficientů dobře vidět: o funkcích $\sin(2k+1)x$ již víme, že mají na $(-\pi; \pi)$ normu $\sqrt{\pi}$. Správný součet tedy bude

$$\|\widehat{f}_k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(4 \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{2k+1} \Big)^2 = \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

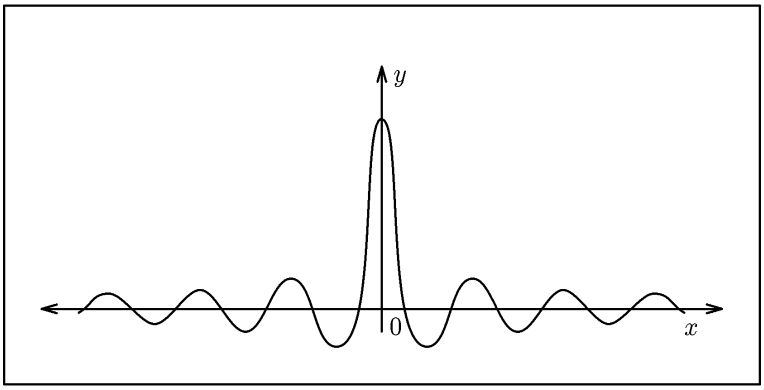
Nyní přichází Besselova rovnost

$$\frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 2\pi, \qquad \text{úpravou} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Oba systémy — trigonometrický i s komplexní exponenciálou — lze samozřejmě používat jak v reálném, tak komplexním oboru. Mezi koeficienty a_n, b_n a c_n pak bude jednoduchá souvislost plynoucí ze známých vztahů

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx, \text{ a inverzních}$$
$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Příslušné vztahy jsou



Obrázek 1: Dirichletovo jádro $D_n(x)$; $a = \pi/(2n+1)$.

$$
\begin{gathered}
c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2i}, \\
a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \\
c_0 = \frac{a_0}{2}.
\end{gathered}
$$

Při důkazu bychom museli uvažovat posloupnost částečných součtů. Například n-tý a $(-n)$-tý člen v sumě s komplexními exponenciálami (až do členů s $\pm kx$) bychom upravovali takto

$$
\begin{gathered}
c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n(\cos nx + i \sin nx) + c_{-n}(\cos nx - i \sin nx) = \\
= (c_n + c_{-n}) \cos nx + (c_n - c_{-n}) i \sin nx = a_n \cos nx + b_n \sin nx
\end{gathered}
$$

a dále bychom přešli $k \to \infty$.

Jak už bylo řečeno výše, hodláme zkoumat bodovou konvergenci Fourierových řad k původním funkcím; zajímá nás, do jaké míry a za jakých předpokladů jsme oprávněni psát mezi funkci a její Fourierovu řadu rovnítko. Při důkazu příslušných vět je samozřejmě důležité vědět něco o částečných součtech Fourierových řad. S tím úzce souvisí pojem *Dirichletovo jádro.*

Je-li f definována na $(-\pi, \pi)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje funkce $D_n : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ taková, že platí

$$
s_n(f)(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) D_n(\xi - x)\, \mathrm{d}\xi. \tag{20}
$$

Funkce D_n se nazývá Dirichletovo jádro, a to i pro obecný ortonormální systém (místo komplexních exponenciál) závisí pouze na těchto bázových funkcích a nikoliv na f. V našem případě D_n i snadno spočteme, pokud si vyjádříme c_k. Nezapomeneme na komplexní sdružení ve skalárním součinu a díky konečnosti sumy ji můžeme vložit do integrálu

$$
s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-ik\xi}\, \mathrm{d}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-\xi)}\, \mathrm{d}\xi.
$$

Suma se nyní vztahuje na geometrickou řadu, kterou snadno sečteme

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-\xi)} = e^{-in(x-\xi)} \sum_{k=0}^{2n} e^{ik(x-\xi)} = e^{-in(x-\xi)} \frac{1 - e^{i(2n+1)(x-\xi)}}{1 - e^{i(x-\xi)}} = \\
= \frac{e^{i(n+1/2)(x-\xi)} - e^{-i(n+1/2)(x-\xi)}}{2i} \cdot \frac{2i}{e^{i(x-\xi)/2} - e^{-i(x-\xi)/2}} = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})(x-\xi)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(x-\xi)\right]}.
\end{gathered}
$$

Porovnáním s definičním vztahem (20), vidíme, že posledně psaný výraz je již Dirichletovo jádro pro n-tý částečný součet.

Graf funkce $D_n(x)$ (viz obrázek 1) má jedno výrazné maximum v $x - \xi = 0$ (nutno počítat jako limitu $x - \xi \to 0$), dále od tohoto bodu funkce rychle klesá a kmitá s malou proměnlivou amplitudou kolem nuly. Na celém $\mathbb{R}$ se „velká" maxima opakují s periodou 2π; do zkoumaného intervalu $(-\pi; \pi)$ se ovšem další takové maximum nevejde. Popsaný charakter se s rostoucím n ještě zvýrazňuje — maximum je v porovnání s hodnotami funkce na zbytku intervalu relativně větší a také se zužuje[9]. Když tedy pro dostatečně vysoké n spočítáme integrál (20), bude jeho hodnota ovlivněna pouze hodnotami $f(\xi)$ pro $x-\xi \approx 0$. Jinými slovy, analogicky integrálním větám o střední hodnotě, platí

$$s_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) D_n(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi = f(\eta) \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi,$$

kde η leží „blízko“ x. Při limitě $n \to \infty$ (u spojité f) pak $f(\eta) \to f(x)$ a případným normováním funkcí D_n můžeme zařídit, aby jejich integrál pro $n \to \infty$ konvergoval k jedné.

To znamená, že částečné součty $s_n(f)$ u spojitých funkcí f v bodě x konvergují k $f(x)$. Pokud f mění v bodě x skokem hodnotu z a na b a má limitu zleva i zprava (tedy je „až na ten skok spojitá“), pak v integrálu (20) bude zřejmě hrát roli jak a tak b, a protože D_n je symetrická kolem $\xi = x$, bude $s_n(f)$ v tomto bodě konvergovat k průměru $(a+b)/2$.

Ve stručnosti jsme vysvětlili podstatu jedné z následujících vět. Dodejme ještě, že pro obecnou funkci g na místě D_n v (20) se tento integrál nazývá *konvolucí* funkcí f a g (značí se $f * g$). Význam této operace jsme právě viděli: funkce g říká, jak bude u výsledné funkce záviset funkční hodnota v bodě x na funkčních hodnotách původní funkce f ve *všech* bodech[10]. Limitní případ D_n, $n \to \infty$ („Diracova δ-funkce“) pak říká, že tato funkční hodnota výsledku závisí pouze na (a je přímo rovna) $f(x)$.

Poznámka: Bez důkazu uveďme několik tvrzení, která se vztahují k bodové konvergenci Fourierových řad.

1. Carlessonova věta. Pro každou funkci z $\mathscr{L}_2\big((-\pi;\pi)\big)$ konverguje $s_n(f)(x)$ skoro všude k $f(x)$.
2. Fourierovu řadu lze podle definice sestrojit pro každou funkci z $\mathscr{L}_1\big((-\pi;\pi)\big)$. Přitom platí $\mathscr{L}_2\big((-\pi;\pi)\big) \subset \mathscr{L}_1\big((-\pi;\pi)\big)$, neboť podle Schwarzovy nerovnosti

   $$\|f\|_{\mathscr{L}_1} = \int f \cdot 1 = (f,1)_{\mathscr{L}_2} \leq \|f\|_{\mathscr{L}_2} \|1\|_{\mathscr{L}_2}$$

   má každá funkce integrabilní v $\mathscr{L}_2$ konečný integrál i v $\mathscr{L}_1$.
3. Existuje ovšem funkce z $\mathscr{L}_1\big((-\pi;\pi)\big)$, jejíž Fourierova řada diverguje pro každé $x \in (-\pi;\pi)$ a
4. existuje *spojitá* funkce z $\mathscr{L}_1\big((-\pi;\pi)\big)$, pro niž Fourierova řada diverguje hustě na $(-\pi;\pi)$.

Nyní již postupme ke slíbeným větám.

Věta 11: Bodová konvergence Fourierovy řady pro *spojité* funkce
Nechť f je 2π-periodická funkce, spojitá a po částech spojitě diferencovatelná (tj. f' spojitá až na konečný počet bodů, v nichž existují jednostranné derivace) na $\langle -\pi;\pi \rangle$. Pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergují a $s_n(f) \rightrightarrows f$ na $\langle -\pi;\pi \rangle$.

Lemma:
Funkce $f, \widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nechť jsou si rovny skoro všude na $\mathbb{R}$. Pokud jsou navíc spojité, pak už si jsou funkce rovny všude na $\mathbb{R}$.

Důkaz lemmatu: Existuje tedy množina míry nula $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}$ taková, že na $\mathbb{R} \setminus \mathrm{N}$ je $f(x) = \widetilde{f}(x)$. Pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ a každé jeho okolí platí $U(x_0) \cap \big(\mathbb{R} \setminus \mathrm{N}\big) \neq \emptyset$ (jinak by N byla „moc velká“), a tedy

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big[\exists x_n \in U_{1/n}(x_0) \cap \big(\mathbb{R} \setminus \mathrm{N}\big)\big]\big(f(x_n) = \widetilde{f}(x_n)\big).$$

Ze spojitostí funkcí pak při $n \to \infty$, tedy i $x_n \to x_0$, plyne $f(x_0) = \widetilde{f}(x_0)$.

Důkaz věty: Díky spojitosti a spojité diferencovatelnosti po částech je $f' \in \mathscr{L}_2\big((-\pi;\pi)\big)$. Toho využijeme k důkazu, že $\sum_n a_n$ a $\sum_n b_n$ pro f konvergují. Podle (14), (15) počítáme

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \Big[f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \widetilde{b}_n,$$

[9] V teorii distribucí lze po vhodném normování za limitu posloupnosti D_n (a jim odpovídajících distribucí) pro $n \to \infty$ brát Diracovu δ-funkci.

[10] Funkce g udává váhu — $g(\xi)$ říká, s jakou vahou máme brát hodnotu $f(x+\xi)$ pro výpočet $(f * g)(x)$.

kde $\widetilde{b}_n$ značí příslušný koeficient Fourierovy řady pro funkci f' na $(-\pi;\pi)$. Analogicky pro b_n a $\widetilde{a}_n$ najdeme

$$b_n = \frac{1}{n}\widetilde{a}_n.$$

Je-li $f' \in \mathscr{L}_2\big((-\pi;\pi)\big)$, pak ovšem podle Besselovy nerovnosti (7) konvergují součty $\widetilde{a}_n^2$ a $\widetilde{b}_n^2$ (samozřejmě absolutně). Protože platí[11] $AB \le (A^2+B^2)/2$, můžeme omezit $|a_n|$

$$|a_n| = \frac{|\widetilde{b}_n|}{n} \le \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+\widetilde{b}_n^2\Big),$$
$$\text{analogicky}\quad |b_n| \le \Big(\frac{1}{n^2}+\widetilde{a}_n^2\Big).$$

Při sčítání přes n při $n\to\infty$ stojí v obou případech na pravých stranách součet absolutně konvergentních řad, tedy i součty $|a_n|$ a $|b_n|$ konvergují.

Po umocnění výše uvedených nerovností na druhou bychom dostali, že i součty a_n^2 a b_n^2 konvergují. Fourierova řada f tím pádem konverguje ve smyslu normy v $\mathscr{L}_2$. To bylo ale jasné již na začátku, neboť $f \in \mathscr{L}_2\big((-\pi;\pi)\big)$, a lze tedy užít Riesz–Fischerovu větu.

Nyní můžeme omezit částečné součty $s_n(f)$ v každém bodě takto

$$\big|s_n(f)(x)\big| = \Big|\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\Big| \le \sum_{k=0}^{n}\big(|a_k\cos kx| + |b_k\sin kx|\big) \le \sum_{k=0}^{n}\big(|a_k|+|b_k|\big).$$

Toto omezení je stejnoměrné — platí pro všechna $x \in \langle-\pi;\pi\rangle$. Protože součty v poslední sumě konvergují, při $n\to\infty$ dostáváme odhad pro Fourierovu řadu f, čili její absolutně konvergentní majorantu. Samotná Fourierova řada potom dle Weierstrassovy věty musí též stejnoměrně konvergovat a její součet můžeme označit $\widetilde{f}(x)$. Částečné součty jsou samozřejmě spojité funkce, a protože k $\widetilde{f}$ konvergují stejnoměrně, je i $\widetilde{f}$ spojitá.

Podle Riesz–Fischerovy věty (6) ovšem $s_n(f)$ konverguje také k f ve smyslu normy v $\mathscr{L}_2$. Víme, že limita může mít nejvýše jednu hodnotu, a tedy $\|f-\widetilde{f}\| = 0$, funkce f a $\widetilde{f}$ se rovnají skoro všude na $(-\pi;\pi)$. Přitom jsou $\widetilde{f}$ i f spojité a podle lemmatu před větou si jsou rovny všude.

Poznámka: Větu lze zobecnit. Nechť $k\in\mathbb{N}$, $f\in C^{(k)}(\mathbb{R})$ 2π-periodická a $f^{(k+1)}$ po částech spojitá. Pak

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-1}(|a_n|+|b_n|)$ konverguje a
2. $D^\alpha\big(s_n(f)\big)\rightrightarrows D^\alpha f$, kde D^α značí libovolnou derivaci řádu menšího než k.

Při důkazu nejprve použijeme předchozí větu pro funkci $f^{(k)}$, čímž ukážeme stejnoměrnou konvergenci její Fourierovy řady. Dále postupujeme indukcí. Pro první bod bychom analogickým postupem jako v provedeném důkazu mohli najít

$$|a_n| = \frac{1}{n^k}|\widetilde{a}_n| \text{ pro sudé } k$$
$$|a_n| = \frac{1}{n^k}|\widetilde{b}_n| \text{ pro liché } k.$$

Důkaz bodu 1. by pak byl již triviální.

Spočítáme ještě jednu Fourierovu řadu, která nám umožní větu (11) zobecnit i pro funkce „se skoky“, funkce po částech spojité.

Příklad: 2π-periodická funkce F má předpis $F(x) = (\pi-x)/2$ na $(0;2\pi)$, v nule bereme $F(0)=0$, na zbytku $\mathbb{R}$ ji periodicky dodefinujeme. Spočtěme její Fourierovu řadu.

Funkce F je lichá, a tudíž všechna $a_n = 0$. Dále počítáme per partes

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{\pi-x}{2}\cos nx\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+0 = \frac{1}{n}.$$

[11] Variace na téma $0 \le (A-B)^2$.

Důkaz, že je potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ splněno

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \tag{21}$$

si ponecháme do příští kapitoly. Pro funkci F zřejmě nemůžeme použít větu (11), ale z platnosti (21) již dokážeme tuto větu rozšířit dokonce na všechny funkce po částech spojité na $\langle 0; 2\pi)$.

Věta 12: Bodová konvergence Fourierovy řady pro ***po částech spojité*** **funkce**
Mějme f po částech hladkou (a ne nutně spojitou) 2π-periodickou funkci[12]. Pak

$$s_n(f)(x) \to \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

to jest že částečné součty Fourierovy řady v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ konvergují k aritmetickému průměru *jednostranných limit* funkce f v bodě x.

Poznámka: Speciálně, pokud je f v x spojitá, pak samozřejmě $s_n(f)(x) \to f(x)$.

Důkaz: Pro funkci F z předchozího příkladu tvrzení platí s tím, že (21) dokážeme v kapitole o funkcích komplexní proměnné. Povšimněme si obzvláště bodu $x = 0$:

$$2F(0) = F(0^+) + F(0^-) = \pi/2 - \pi/2 = 0.$$

Dále budiž $f \in C^1(\langle a_i; a_{i+1}\rangle)$ pro $i = 0, \dots, n-1$ a položme $c_i = \big(f(a_i^+) - f(a_i^-)\big)/\pi$. Funkce

$$g(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i F(x - a_i)$$

je spojitá na $(-\pi; \pi)$, případné skoky v bodech a_i jsme vyhladili. Přičítáním 2π-periodických funkcí $F(x - a_i)$ zároveň zůstane i g 2π-periodická. Nyní již pro g můžeme použít větu (11), pročež Fourierova řada g konverguje ve všech bodech ke g. Fourierovu řadu pro f mohu tedy zapsat jako součet Fourierových řad pro g a $c_i F(x - a_i)$. Pro tyto funkce věta (11) platí, a tak platí i pro jejich součet (tvrzení věty je „aditivní“).

Poznámka: Existují i obecnější věty, které dokazují bodovou konvergenci Fourierových řad i za slabších předpokladů o funkci f. Zájemce odkazujeme na Kopáčkova skripta Matematika pro fyziky IV.

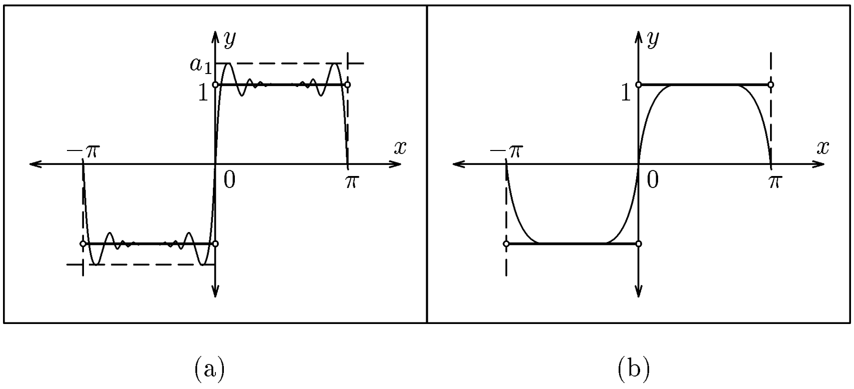
Poznámka: Má význam i z praktického hlediska na trigonometrických Fourierových řadách něco zlepšovat? V některých případech rozhodně ano. Například při rozvoji funkce $\operatorname{sgn} x$ na $(-1; 1)$ a zkoumání částečných součtů bychom zjistili i pro vysoká n průběh jako na obrázku (2). Řada bude obsahovat pouze siny a bude procházet nulou. Pak bude rychle stoupat; tím rychleji, čím bude větší n. Hodnotu 1 ovšem překmitne, vrátí se k ní a dále kolem této hodnoty již bude oscilovat s malou amplitudou. Nezávisle na n bude hodnota v maximu prvního překmitu rovna zhruba 1,09. Při rostoucím n se bude sice zmenšovat šířka překmitu, nikoliv však jeho výška (důkaz tohoto může být obsahem cvičení). Tuto skutečnost nazýváme Gibbsovým jevem. Ve fyzice na tento problém narazíme, pokud necháme obdélníkové pulzy procházet zařízením, které nepropouští například příliš vysoké frekvence. Zkuste také srovnat graf částečných součtů s průběhem intenzity světla při Fresnelově difrakci na kruhovém otvoru a jeho chování při $n \to \infty$, tj. $\omega \to \infty$.

Problémy „s kmitáním“ řeší například postup dle Féjera. Zkoumáme konvergenci „částečných součtů“

$$\widetilde{s}_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k(f),$$

viz obrázek (2). Ukazuje se, že za slabších předpokladů než u námi dokázaných vět je konvergence „lepší“: již pokud je f spojitá, pak $\widetilde{s}_n(f) \rightrightarrows f$. Důkaz lze nalézt opět v Kopáčkových skriptech.

[12] Tím máme na mysli, že například na $\langle -\pi; \pi\rangle$ existuje dělení $-\pi = a_0 < \dots < a_n = \pi$ takové, že $f \in C^1(\langle a_i; a_{i+1}\rangle)$ pro $i = 0, \dots, n-1$. Na krajích intervalů mluvíme o jednostranných derivacích.



Obrázek 2: (a) částečný součet Fourierovy řady pro funkci $\operatorname{sgn} x$ na $\langle -\pi; \pi\rangle$, $a_1 \approx 1{,}09$; (b) částečný součet řady $\widetilde{s}_n$ pro tutéž funkci dle Féjera.

13 Funkce komplexní proměnné

V této kapitole se budeme poprvé důkladněji zabývat funkcemi komplexní proměnné. Množinu všech komplexních čísel jsme v našich úvahách dosud ztotožňovali s $\mathbb{R}_2$, a proto nám může připadat zbytečné se o tento „speciální" případ zajímat v rámci samostatné kapitoly. Již zběžné zamyšlení však postačí k tomu, abychom nahlédli rozdíl: na množině komplexních číslech jsme definovali operaci násobení, kterou z prostorů $\mathbb{R}_n$ $(n \geq 1)$, pro které jsme budovali analýzu, neznáme. Tato operace určuje i onu „magickou" formuli $\sqrt{-1} = i$.

Tak jako jsme v analýze funkcí reálných proměnných definovali derivaci, zavedeme ji i v teorii funkcí komplexní proměnné. Tento pojem nás dovede k holomorfním funkcím, které mají mnoho zajímavých vlastností, na nichž uvidíme některé rozdíly mezi komplexní a reálnou analýzou.

Navíc víme, že množina komplexních čísel (narozdíl od $\mathbb{R}$) je algebraicky uzavřené těleso. Algebraicky uzavřeným tělesem rozumíme takové těleso K, pro které platí, že pro každý polynom p stupně $n \geq 1$ z příslušneho okruhu polynomů nad tímto tělesem $K[x]$ [13] existuje právě n kořenů $x_1, \ldots, x_n \in K$ polynomu p počítaných včetně jejich násobnosti.

Při některých úvahách v následujících paragrafech bude důležitá naše představa množiny komplexních čísel, závislá od toho, jaký na ní žijící objekt budeme zkoumat.

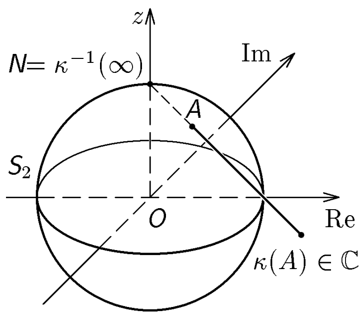
Začněme tou důvěrně známou. Pro zavedení metrických vlastností na $\mathbb{C}$ stačí představa $\mathbb{C}$ jako Gaussovy rovny. Normu čísla $r = r_1 + ir_2 \in \mathbb{C}$ zavádíme jako vzdálenost bodu (r_1, r_2) od počátku. Tj. definujme normu $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$.

§1. Riemannova sféra: Základní analytické pojmy

Setkali jsme se již s tím, že limita funkce reálné proměnné nebyla vždy vlastním reálným číslem, lze proto očekávat, že i v případě komplexní proměnné bude zapotřebí dodat do množiny komplexních čísel $\mathbb{C}$ nevlastní prvek ∞, a tak vytvořit prostor $\mathbb{C}^* \stackrel{\text{df}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, který bude na operaci limity funkce (např. spojité) uzavřený.

Abychom věděli, proč dodáváme k $\mathbb{C}$ pouze jeden nevlastní bod (nikoliv např. v „každém směru nějaké nekonečno"), seznámíme se s Riemannovou sférou jako modelem $\mathbb{C}^*$. Uvažujme jednotkovou sféru S_2 v $\mathbb{R}_3$, na které vyberme jeden bod N a nazvěme jej severním pólem N. Množinu komplexních čísel si představme jako Gaussovu rovinu. Sféru umístěme tak, aby protínala Gaussovu rovinu v hlavní kružnici (tj. střed sféry leží na Gaussově rovině) a zároveň kolmý průmět severního pólu na Gaussovu rovinu byl středem sféry. Definujme tzv. *stereografickou projekci* $\kappa' : S_2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$, která přiřadí bodu sféry $A \neq N$ bod, v kterém protne přímka AN Gaussovu rovinu. Pokud zavedeme souřadnice v $\mathbb{R}_3$ tak, jak je tomu

[13] Okruhem polynomů $K[x]$ nad tělesem K rozumíme polynomy (s definovaným násobením a sčítáním), jejichž koeficienty jsou z tělesa K.



Obrázek 3: Stereografická projekce Riemannovy sféry

na obr. 3 (reálná osa ξ, imaginární osa η a z výška), lze nalézt pro κ' následující souřadnicové vyjádření

$$\kappa' : (\xi, \eta, z) \mapsto \frac{\xi}{1-z} + i\frac{\eta}{1-z}.$$

Nyní stačí κ' rozšířit na celou S_2 takto: $\kappa(N) = \infty$ a restrikce κ na $S_2 \setminus \{N\}$ je rovna κ'. Takto definované κ je zřejmě bijekce S_2 na $\mathbb{C}^*$, a proto nečiníme velký rozdíl mezi sférou S_2 jako modelem $\mathbb{C}^*$ a množinou $\mathbb{C}^*$ samou. Sféru S_2 nazýváme *Riemannovou sférou.*

Poznámka: Pro pohodlí definujme normu bodu ∞ následovně: $|\infty| = \infty$, kde na pravé straně je nám známé nekonečno, jímž jsme rozšířili $\mathbb{R}$. Využijeme toho, že na $\mathbb{R}^*$ máme definovanou relaci uspořádání $>$.

Definice 6: Okolí. Riemannova sféra.
Na základě výše uvedeného nazýváme $\mathbb{C}^*$ *Riemannovou sférou.* Pro $z \in \mathbb{C}$ a $A \in \mathbb{R}^+$ definujeme *otevřené okolí* $U_A(z)$ bodu z o poloměru A tradičně: $U_A(z) \stackrel{\text{df}}{=} \{w \in \mathbb{C}^* \mid |w - z| < A\}$. Pro $z = \infty$ definujme $U_A(\infty) \stackrel{\text{df}}{=} \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| > 1/A\}$.

Poznámka: Riemannovu sféru jsme zavedli proto, abychom viděli topologii množiny komplexních čísel — zejména, abychom měli představu „umístění“ nekonečna a jeho okolí. Nekonečno si můžeme představovat jako severní pól a jeho okolí jako (arktické) polární oblasti.

Rozšiřme algebraické operace, jak je známe z $\mathbb{C}$, na $\mathbb{C}^*$:

$$(\forall z \in \mathbb{C})(z \pm \infty = \infty), \infty + \infty = \infty, \qquad (\forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\})(z \cdot \infty = \infty),$$
$$(\forall z \in \mathbb{C}) \left(\frac{z}{\infty} = 0 \right), \qquad (\forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}) \left(\frac{z}{0} = \infty \right).$$

Podotkněme, že nedefinujeme ∞/∞, $0/0$, $0.\infty$, $\infty - \infty$.

Máme-li již na $\mathbb{C}^*$ definován pojem blízkosti, lze jednoduše definovat pojem limity obvyklým způsobem. Konstrukci této definice přenecháváme čtenáři. Spojitost definujeme rovněž obvyklým způsobem: $f : U(a) \to \mathbb{C}$ je spojitá v a, pokud $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Funkci nazveme spojitou na otevřené množině, pokud je spojitá v každém jejím bodě. Funkci f nazveme spojitou na uzavřené množině G, pokud existuje otevřená nadmnožina O množiny G a rozšíření F funkce f na O ($F \uparrow G = f \uparrow G$), že F je spojitá na O.

Cvičení: Ověřte, že každý polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ s kladným stupněm je spojité zobrazení na $\mathbb{C}^*$, pokud jej v ∞ definujeme $p(\infty) = \infty$.

§2. Projektivní prostor

Definice 7: Projektivní prostor.
Nechť $M \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbb{C}_2 \setminus \{(0,0)\}$. Zaveďme relaci $\sim$ na M ($\sim \subset M \times M$) takto: nechť $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, pak[14]

$$\big((a,b) \sim (c,d)\big) \Leftrightarrow \big(\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\big)\big((a = \lambda c) \wedge (b = \lambda d)\big).$$

Komplexním *projektivním prostorem* $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ označme faktorizaci M podle ekvivalence $\sim$, tj. $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ je množina, jejímiž prvky jsou třídy ekvivalence podle $\sim$. Symbolicky zapsáno $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \overset{\mathrm{df}}{=} M\ /\!\sim$.

Poznámka: Třídou ekvivalencí míníme množinu skládající se z navzájem $\sim$-ekvivalentních prvků. Víme, že faktorizace neprázdné množiny M podle ekvivalence $\sim$ je úplný a disjunktní rozklad, tj. $\bigcup(M\ /\!\sim) = M$ a $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro všechny $M_i, M_j \in M\ /\sim$, pokud $i \neq j$. Třída ekvivalence je jednoznačně určena, pokud zadáme jeden z jejích prvků. Třídu, které náleží prvek k, značme $[k]$.

Poznámka: Definujme zobrazení $\eta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{P}(\mathbb{C})$ předpisem $\eta(u) \overset{\mathrm{df}}{=} [(u,1)]$ pro $u \in \mathbb{C}$ a $\eta(\infty) \overset{\mathrm{df}}{=} [(1,0)]$. Snadno ukážete[15], že η je bijekce $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ — toto zobrazení indukuje po Riemannově sféře (ztotožnitelné s $\mathbb{C}^*$ např. stereografickou projekcí) další z modelů množiny $\mathbb{C}^*$.

Poznámka: Prostor $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ poskytuje výhodný prostředek pro reprezentaci lineárních lomených zobrazení, jimiž se budeme zabývat v následujícím paragrafu. Později ukážeme, že lineární lomená zobrazení mají tu významnou analyticko–geometrickou vlastnost, že lokálně zachovávají úhly. Taková zobrazení se nazývají konformní. Později ukážeme, že postačující podmínkou pro konformnost je nenulovost derivace. Složíme-li zobrazení zachovávající lokálně úhly s nějakým řešením Laplaceovy rovnice, pak i vzniklá kompozice je v jádru Laplaceova zobrazení[16].

Poznámka: Definujme další zobrazení η' (nazývejme jej např. přirozeným výběrem η). $\eta' : \mathbb{C}^* \to M$ takto: $\eta'(u) \overset{\mathrm{df}}{=} (u,1)$, pokud $u \in \mathbb{C}$, a $\eta'(\infty) \overset{\mathrm{df}}{=} (1,0)$. Jeho význam bude formální, nicméně jeho zavedení je nezbytné pro přesnou formulaci úvah v následujícím paragrafu. Poznamenejme, že η' není surjekce na M. Čtenář snadno nahlédne, že η' je injektivním zobrazením. Zřejmě $\eta(u) = [\eta'(u)]$.

§3. Möbiova grupa lineárních lomených zobrazení

Definice 8: Lineární lomené zobrazení. Dvojpoměr bodů.
Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a $ad - bc \neq 0$. Pak zobrazení $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ nazveme *lineárním lomeným zobrazením* (homografií), pokud platí:

1. Pokud $c = 0$, pak $f(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ pro $z \in \mathbb{C}$ a $f(\infty) = \infty$.
2. Pokud $c \neq 0$, pak $f(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{az+b}{cz+d}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ jsou po dvou různá, pak definujme *dvojpoměr* čísel a, b, c, d v tomto pořadí takto:

$$(a,b,c,d) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

Uvažujme $\mathbb{GL}(2,\mathbb{C}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{A \in M^{2\times 2}(\mathbb{C}) \,|\, \det A \neq 0\}$.[17] Snadno ověříte, že $\big(\mathbb{GL}(2,\mathbb{C}), \cdot, I, ^{-1}\big)$, kde $\cdot$ je násobení matic, $^{-1}$ je zobrazení inverze a I je jednotková matice, je grupou.

Představujme si, že matice z $\mathbb{GL}(2,\mathbb{C})$ působí na prostoru $\mathbb{C}_2$. Pokud $\omega = (a,b) \in \mathbb{C}_2$, pak obraz tohoto bodu v zobrazení indukovaném maticí A značíme $A(\omega)$. Násobíme: řádek $\times$ sloupec.

Každému prvku $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{GL}(2,\mathbb{C})$ lze přiřadit lineární lomené zobrazení $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ definované na $\mathbb{C}^*$.

[14] Snadno ověříte, že takto definovaná relace $\sim$ je relací ekvivalence na M.
[15] Ověříte, že každý prvek z $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ je ve třídě s $(u,1)$ nebo s $(1,0)$.
[16] Řeší Laplaceovu rovnici, pozn. přek.
[17] Symbolem $M^{n\times n}(K)$ míníme množinu matic typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou prvky tělesa K.

Uvažujme zobrazení $\mu_A : \mathbb{P}(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}(\mathbb{C})$ definované následovně. Nechť $\omega = (r,s) \in M$, pak $\mu_A([\omega]) \overset{\mathrm{df}}{=} [A(\omega)]$ — rozmyslete si, že tento objekt nezávisí na výběru reprezentanta. Abychom viděli smysluplnost zavedení takovéhoto zobrazení μ_A, proveďme následující výpočet. Předpokládejme, že chceme určit hodnotu homografie L_A v nějakém bodě $p \in \mathbb{C}^*$. Spočtěme vždy nejprve obraz bodu p v zobrazení η. Pak na vzniklý prvek z $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ aplikujme zobrazeni μ_A. Na závěr proveďme převod pomocí zobrazení η^{-1} (uvědomte si, že tyto η nejsou čárkované).

Nechť $p \in \mathbb{C}$, potom

$$\mu_A\big(\eta(p)\big) = \mu_A\big([(p,1)]\big) = [A(p,1)] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}\right] = [(ap+b, cp+d)] = \left[\left(\frac{ap+b}{cp+d}, 1\right)\right],$$

$$\eta^{-1}\left(\left[\left(\frac{ap+b}{cp+d}, 1\right)\right]\right) = \frac{ap+b}{cp+d} = L_A(p).$$

Poslední krok před převodem je platný jen pro $p \neq -d/c$. Pro $p = -d/c$ výpočet skončí u členu $[(ap+b, cp+d)]$, který vyčíslíme pro toto p na $[(-a\frac{c}{d} + b, 0)]$. První člen uspořádáné dvojice generující spočtenou třídu ekvivalence je nenulový dík regularitě A.

Nechť nyní $p = \infty$, potom

$$\mu_A\big(\eta(\infty)\big) = \mu_A\big([(1,0)]\big) = [A(1,0)] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = [(a,c)] = \left[\left(\frac{a}{c}, 1\right)\right],$$

pokud $c \neq 0$. Převod $\eta^{-1}\big([(a/c, 1)]\big) = a/c$ je opět roven $L_A(\infty)$. Pro $c = 0$ nemůžeme provést poslední úpravu, a tak výpočet uzavřeme u členu: $[(a,0)] = [(1,0)]$. Platí, že $\eta^{-1}\big([(1,0)]\big) = \infty = L_A(\infty)$.

Poznámka: Srovnáme-li výsledky výše provedených výpočtů s předpisy pro funkční hodnotu homografie, uvedenými v její definici 3, zjistíme že se shodují — toto srovnání je u každého výsledku uvedeno explicitně. Zjistili jsme tak, že homografii lze mnohem elegantněji (postup výpočtu je totiž na rozdíl od postupu dle definice 3 jednotný) reprezentovat zobrazením μ_A, definovaným na prostoru $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. To jsme slibovali již v paragrafu o projektivním prostoru. Uvidíme, jak představa zjednoduší i důkazy vět, jejichž předmětem homografie budou. Většinou se budeme odvolávat na známé věty lineární algebry.

Je účelné předchozí představu formalizovat v následujícím lemmatu o projektivní reprezentaci lomených zobrazení. Projektivní ji nazýváme z toho důvodu, že na jejím základě si můžeme homografie představovat pomocí zobrazení μ_A, které působí na $\mathbb{P}(\mathbb{C})$.

Lemma 1. O projektivní reprezentaci homografií.:
Pro každou homografii L_A určenou maticí A platí $L_A = \eta^{-1}\mu_A\eta$.

Tvrzení lze přeformulovat:

Lemma 2:
Pokud L_A je homografie určená maticí A, pak $\eta'\big(L_A(z)\big) \sim A\big(\eta'(z)\big)$ pro každé $z \in \mathbb{C}^*$.

Obsah těchto dvou lemmat by si čtenář, který předchozí úvahy (včetně zavádění η a η') považoval za příliš formální, a proto jim nevěnoval dostatečnou pozornost, měl umět představit. Pokud se mu to podaří, může výše uvedené formality zapomenout.

Poznámka o zobecněné injektivitě: Dodejme jednoduchý fakt, který budeme potřebovat znát o zobrazení η' (jedná se o jakousi „zobecněnou injektivitu“). Pokud $\eta'(u) = \lambda\eta'(v)$ pro nenulové λ, pak $u = v$.

Věta 13: O homografii a dvojpoměru.

1. Homografie je spojité bijektivní zobrazení $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}^*$.
2. $(M, \cdot, I, ^{-1})$ tvoří grupu (tzv. *Möbiovu grupu*).
3. Dvojpoměr je invariantem každé homografie. Tj. pokud f je homografie, pak $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)\big)$ pro $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}^*$ vesměs různá, aby byl dvojpoměr definován.
4. Pokud $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, $w_i \neq w_j$ pro $i \neq j$ a $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, $z_i \neq z_j$ pro $i \neq j$, pak existuje jediná homografie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, pro niž $f(z_i) = w_i$ pro $i = 1, 2, 3$.

Důkaz: Provedeme velmi detailně, aby si čtenář ozřejmil zacházení s výše definovanými symboly.

Ad 1.: Užijeme druhého lemmatu tohoto paragrafu a sporem ukažme injektivitu homografie L_A. Nechť existují $u, v \in \mathbb{C}^*$ různá taková, že $L_A(u) = L_A(v)$. Dle lemmatu 2 víme, že $\eta'\big(L_A(u)\big) \sim A\big(\eta'(u)\big)$ a $\eta'\big(L_A(v)\big) \sim A\big(\eta'(v)\big)$. Jelikož $L_A(u) = L_A(v)$, tak díky tranzitivitě $\sim$ platí $A\big(\eta'(u)\big) \sim A\big(\eta'(v)\big)$. Dle definice ekvivalence $\sim$ to znamená, že existuje nenulové komplexní λ takové, že $A\big(\eta'(v)\big) = \lambda A\big(\eta'(u)\big)$. Vzhledem k linearitě A lze předchozí vztah zapsat jako $A\big(\eta'(v) - \lambda\eta'(u)\big) = 0$. Z lineární algebry víme, že tato rovnice má netriviální řešení jen tehdy, pokud $\det A = 0$, což však není náš případ (uvažujeme pouze regulární matice), a proto jediné řešení je triviální: $\eta'(v) = \lambda\eta'(u)$. To implikuje (viz poznámku o zobecněné injektivitě), že $u = v$, tj. dostáváme spor. Obdobně dokážete i surjektivitu (zobrazení je na), opírajíce se o to, že regulární matice indukuje surjektivní zobrazení, jak je známo z L.A. (příp. i z N.Y.). Spojitost homografie plyne z její definice a definice algebraických operací s nekonečnem, které jsme uvedli v paragrafu o Riemannově sféře.

Ad 2: Ukážeme, že M je uzavřena na operaci skládání. Nechť L_A, L_B jsou homografie, pak užitím lemmatu 1 o reprezentaci platí, že: $L_A = \eta^{-1}\mu_A\eta$ a $L_B = \eta^{-1}\mu_B\eta$. Pro L_A a L_B pišme: $\big(L_A \circ L_B\big)(z) = L_A\big(L_B(z)\big) = \eta^{-1}\mu_A\eta\big(\eta^{-1}\mu_B\eta(z)\big) = \eta^{-1}\mu_A\mu_B\eta(z) = \eta^{-1}\mu_A[B\eta'(z)] = \eta^{-1}[AB\eta'(z)] = \eta^{-1}\mu_{AB}\eta(z)$. Využili jsme toho, že skládání lineárních zobrazení, které jsou prezentovány maticemi, je násobení těchto matic, a faktu, že součin dvou regulárních matic je regulární matice. Obdobně bychom dokázali i další vlastnosti grupy: existenci inverze homografie jako existenci inverzní matice k regulární matici, identickou homografii ztotožníme s jednotkovou maticí, asociativnost skládání homografií je též zřejmá.

Ad 4: Definujme homografii f předpisem $f(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$, zobrazující (souhrnně zapsáno) $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (0, 1, \infty)$. Definujme homografii g předpisem $g(w) = \frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$, zobrazující (souhrnně zapsáno) $(w_1, w_2, w_3) \mapsto (0, 1, \infty)$. Jelikož M je grupa, tak složení $g^{-1}f$ je homografie. Je zřejmé, že toto složení je hledaná homografie. Sporem dokažme jednoznačnost takové homografie. Nechť existují alespoň dvě homografie L_1, L_2 zobrazující z_i na w_i pro $i = 1, 2, 3$. Díky bodu 2 víme, že $L \stackrel{\text{df}}{=} L_2^{-1}L_1$ je také homografie, navíc zobrazující z_i na z_i pro $i = 1, 2, 3$ (má tři pevné body). Za předpokladu, že jsou všechny tyto pevné body konečné, je $Lz = z$ polynomickou rovnicí stupně nejvýše dva s komplexními koeficienty[18], která má ovšen nejvýše dva různé kořeny. Za předpokladu, že jedním pevným bodem je nekonečno, pak $Lz = z$ je lineární (opět viz poznámku pod čarou), která má nejvýše jeden kořen. V obou případech jsme dospěli ke sporu.

Ad 3: Nechť $y_i = \frac{\alpha x_i + \beta}{\gamma x_i + \delta}$ jsou hodnoty určité (libovolné pevně zvolené) homografie v bodech $x_i \in \mathbb{C}^*$, kde $i = 1, \ldots, 4$. Z tohoto předpisu dostaneme přímým výpočtem, že

$$y_i - y_k = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(x_i - x_k)}{(\gamma x_k + \delta)(\gamma x_k + \delta)}$$

pro $k \neq i$. Dosadíme-li za k do předchozí formule nejdříve 3 a potom 4 a takto vzniklé formule vydělíme (vydělíme levou stranu první s levou stranou druhé a pravou stranu první s pravou stranou druhé formule), zustane rovnost zachována a obdržíme

$$\frac{y_i - y_3}{y_i - y_4} = \frac{x_i - x_3}{x_i - x_4} \cdot \frac{\gamma x_4 + \delta}{\gamma x_3 + \delta}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za i nejprve 1 a potom 2 a vztahy vydělíme, dostaneme:

$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} \cdot \frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_3} = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3},$$

což dokazuje tvrzení.[19]

Poznámka: Výše zmíněná věta hovoří o geometrii projektivního prostoru. Věta říká, že dvojpoměr je invariantem vzhledem ke grupě homografií (fakt, že homografie tvoří grupu jsme též ukázali), které jsou bijektivními zobrazeními na $\mathbb{C}$. Tuto situaci známe v jazykově jiné podobě. Eukleidovská norma $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ je invariantem vzhledem ke grupě eukleidovských shodností (otočení, posunutí, nepřímé otočení), které jsou také bijetivními zobrazeními na $\mathbb{R}_2$.

[18] Byli jsme nedůslední, neboť jsme opomněli případ, kdy této polynomické rovnici nelze přiřadit stupeň, tj. pokud je polynom P v homogenní rovnici $P = 0$ nulový. Tehdy zobrazení L bylo identitou na $\mathbb{C}$, a proto $L_2 = L_1$, což není náš případ.

[19] Uvědomte si, že jsme kladli $\infty : \infty = 1$. Bod 3 věty jsme ve skutečnosti (in fact) dokázali pro dvojpoměr definovaný i pro nevlastní čísla. Čtenář si sám doplní, jak jsme pro náš účel definovali 0/0.

Tohoto podstatného rysu všech tehdy známých geometrií si všiml Felix Klein, který ve svém Erlangenském programu (tak je nazýván záměr Kleinovy přednášky proslovené 1872 v Erlangenu) vyzýval k systematickému způsobu výstavby geometrií, které se v jeho době začaly intenzivně zkoumat. Koncem osmnáctého století, kdy žil ještě K. F. Gauss, se zkoumaly převážně geometrie, které vznikly při studiu pátého Eukleidova postulátu.

Pátý postulát lze formulovat následovně. Pro každou přímku p, která je prvkem Eukleidovy geometrie, a každý bod A, který je prvkem Eukleidovy geometrie a není prvkem této přímky p, existuje právě jedna přímka r, která je prvkem Eukleidovy geometrie, procházející bodem A a rovnoběžná s přímkou p. Mnozí matematici chtěli pátý postulát vyvodit ze zbylých čtyř. Postupem času pod vlivem Saccheriho, který však věřil, že postulát vyvodit lze, začali Gauss, Lobačevskij a Bolay budovat geometrické světy, které předpokládaly negaci pátého postulátu. V době jejich práce se věřilo, že je takovéto počínání neseriózní, neboť prý tyto teorie musí obsahovat spor. Samotný Gauss své práce z této oblasti nikdy nepublikoval, protože se obával nepochopení.

Klein si povšiml, že všechny tyto geometrie mají jedno společné. Vždy je dána množina E a grupa H permutací E a definuje se určitá vlastnost množiny bodů z E, která je invariantní vzhledem k grupě H, tzv. H-invariant na E. Úkolem geometra je hledat H-invarianty a zkoumat jejich vlastnosti. Např. přímka je invariantem každé shodnosti v Eukleidově geometrii nebo Desarguesova konstrukce je invariantem projektivní geometrie, neboť je invariantní vzhledem ke kolineacím atd.

Zatím však nevíme, proč hovoříme o goemetrii na projektivním prostoru, když jsme jak dvojpoměr, tak homografie definovali na $\mathbb{C}$. Vzpomeňme si, že metody lineární algebry pomohly klasifikovat eukleidovské shodnosti. Eukleidovskou shodností je každé zobrazení na $\mathbb{R}_n$, jehož matice je ortonormální (unitární a reálná). Pokud mluvíme o maticích, museli jsme v Eukleidově prostoru[20] sestrojit souřadný systém a zadat bijektivní zobrazení bodů tohoto prostoru na $\mathbb{R}_n$. Předpokládejme, že chceme na $\mathbb{C}^2$ zavést takový souřadný systém, který by umožnil reprezentovat homografie jako lineární zobrazení. Musíme tedy nalézt bijektivní zobrazení $\mathbb{C}^2$ na nějaký nový prostor. Již jsme zjistili (viz předchozí dvě lemmata), že právě na projektivním prostoru se homografie jeví jako lineární zobrazení, a proto za bijekci stačí vzít zobrazení, které každému $a \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ přiřadí třídu ekvivalence $[a]$. Celá geometrie množiny $\mathbb{C}^2$ a grupy homografií se nám převedla v teorii množiny $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ a regulárních lineárních zobrazení, která je nám bližší.

§4. Holomorfní funkce: definice a základní vlastnosti

Definice 9: Derivace. Holomorfní funkce
Nechť $f : U(a) \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{C}$, pak definujme derivaci $f'(a)$ funkce f v bodě a předpisem

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita napravo existuje. Přirozeným způsobem (předpisem pro hodnotu v každém bodě) definujeme také derivaci funkce na vnitřku jejího definičního oboru, značíme ji f'. Řekneme, že f je *holomorfní* na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pokud existuje derivace f' na Ω. Množinu všech holomorfních funkcí na otevřené množině Ω značme $H(\Omega)$.

Věta 14: Algebraické vlastnosti derivace — opakování
Buď $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otevřená v $\mathbb{C}$. Pokud $f, g \in H(\Omega)$, potom $fg \in H(\Omega)$, $f + g \in H(\Omega)$ a, pokud navíc $(\forall x \in \Omega)\big(g(x) \neq 0\big)$, potom $\frac{f}{g} \in H(\Omega)$. Platí známá pravidla:

1. $(f+g)' = f' + g'$ na Ω, pokud $f, g \in H(\Omega)$
2. $(fg)' = fg' + gf'$ na Ω, pokud $f, g \in H(\Omega)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = (f'g - g'f)/g^2$ na Ω, pokud $g(x) \neq 0$ na Ω a $f, g \in H(\Omega)$.
4. $(f \circ h)'(z) = f'\big(h(z)\big)h'(z)$ na X, pokud $h \in H(X)$, $h : X \to \Omega$, $X \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina v $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$.
5. Pokud $f'(a)$ existuje pro $a \in \mathbb{C}$, pak existuje $U(a)$ takové, že f je omezená na $U(a)$.
6. Pokud $f : U(a) \to O \subset \mathbb{C}$, kde je $a \in \mathbb{C}$, O otevřená, $f \in H\big(U(a)\big)$ bijektivní zobrazení $U(a)$ na O, f_{-1} spojitá na O a $f'(a) \neq 0$, pak platí

$$[f_{-1}]'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

[20] Prostoru, který pro svou existenci čerpá Eukleidovy axiomy.

Lemma o ekvivalentní definici derivace:
Nechť $f : U(a) \to \mathbb{C}$. $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existuje $A \in \mathbb{C}$ a funkce $\varphi : U(a) \to \mathbb{C}$ taková, že φ je spojitá v bodě a a $\varphi(a) = 0$ a pro $z \in U(a)$ platí $f(z) - f(a) = A(z-a) + \varphi(z)(z-a)$.

Důkaz: $\Rightarrow$ Pokud existuje $f'(a)$, položme $A \overset{\text{df}}{=} f'(a)$ a definujme $\varphi(z) \overset{\text{df}}{=} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} - A$ pro $z \in U(a) \setminus \{a\}$ a $\varphi(a) = 0$. Spojitost φ v a plyne z existence $f'(a)$; rovnost $f(z) - f(a) = A(z-a) + \varphi(z)(z-a)$ pro $z \neq a$ plyne z definice φ a pro $z = a$ je triviální.

$\Leftarrow$ Pokud existuje funkce φ s danými vlastnostmi, pak pro $z \neq a$ platí $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = A + \varphi(z)$. Počítáme-li limitu $z \to a$ výrazu nalevo, stačí, určíme-li limitu výrazu napravo, neboť se výrazy až na bod, ke kterému konvergujeme, rovnají. Limitu výrazu napravo určíme snadno, neboť φ je v a spojitá a rovna nule: $\lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = A + \lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = A$, čímž je existence derivace $f'(a)$ dokázána.

Důkaz věty: Vlastnosti 1–4 dokazovat nebudeme, čtenář zopakuje postup důkazu analogické věty pro funkci reálné proměnné. Vlastnost 5 plyne z lemmatu takto. Z existence $f'(a)$ plyne existence φ spojité v a a čísla A takových, že platí $f(z) = A(z-a) + \varphi(z)(z-a)$ na O. Jelikož výraz napravo určuje spojitou funkci v a, je zřejmě i f spojitá v a; o spojité funkci víme, že je lokálně omezená.

Dokažme vlastnost 6. Protože f je bijekce na O, tak je f_{-1} prostá na množině O, a proto mají smysl následující úpravy pro všechna $w \in O \setminus \{b\}$, kde $b \overset{\text{df}}{=} f(a)$:

$$\lim_{w\to b} \frac{f_{-1}(w) - f_{-1}(b)}{w-b} = \lim_{w\to b} 1 \Big/ \frac{f\big(f_{-1}(w)\big) - f\big(f_{-1}(b)\big)}{f_{-1}(w) - f_{-1}(b)} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}}. \tag{22}$$

Poslední rovnost je oprávněna větou o limitě kompozice spojitých zobrazeni.

P o z n á m k a : Polynomy komplexní proměnné jsou holomorfní. Racionální lomená komplexní zobrazení, spec. lineární lomená zobrazení, jsou holomorfní na svém definičním oboru (víme, že je to otevřená množina).

§5. CAUCHY–RIEMANNOVY PODMÍNKY: DŮSLEDKY PRO VLASTNOSTI HOLOMORFNÍCH FUNKCÍ

P o z n á m k a o lineárních zobrazeních: Komplexní lineární zobrazení $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je tvaru $R(z) = az$, kde $a_1 + ia_2 = a \in \mathbb{C}$. Lineární zobrazení $S : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ je tvaru $S(x,y) = Ax + By$, kde $A, B \in \mathbb{C}$.

Nechť je dáno komplexní zobrazení $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Definujme zobrazení $M : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ takto $M(x,y) \overset{\text{df}}{=} L(x+iy)$ a M nazývejme zobrazením indukovaným L. Tato definice implikuje: $L(z) = M(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i})$, tj. naopak zobrazení indukované pomocí M. Pokud je M je lineární v obou složkách (bilineární), lze psát

$$L(z) = M\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = A\frac{z+\overline{z}}{2} + B\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{1}{2}(A-iB)z + \frac{1}{2}(A+iB)\overline{z},$$

což je vidět z rozepsání. Pokud požadujeme, aby L bylo (komplexně) lineární, plyne z toho: $A + iB = 0$, tj. $M(x,y) = A\,x + iA\,y$. Tímto způsobem jsme zjistili, že zobrazení L indukované lineárním zobrazením $M : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$, $M = Ax + By$ je komplexním lineárním, pokud $A + iB = 0$. Naopak dostáváme, že zobrazení $M : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ indukované komplexním lineárním zobrazením L je specifického tvaru $M(x,y) = Ax + iA\,y$.

Nechť $M : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ je lineární zobrazení — $M(x,y) = Ax + By$. Dle předchozích úvah víme, že indukované zobrazení L je tvaru $L(z) = \frac{1}{2}(A-iB)z + \frac{1}{2}(A+iB)\overline{z}$. Nechť $r \in \mathbb{C}$, pak $L(rz) = \frac{1}{2}(A-iB)rz + {}+\frac{1}{2}(A+iB)\overline{rz}$. Z tohoto přepisu plyne, že obecné komplexní zobrazení indukované lineárním zobrazením $M : \mathbb{R}_2 \to C$ je složením dvou komponent, jedné lineární (vytýkáme r) a druhé antilineární (vytýkáme $\overline{r}$). Komplexním antilineárním zobrazením míníme zobrazení $L(rz) = \overline{r}L(z)$ a $L(a+b) = L(a) + L(b)$ pro všechna $r, a, b, c, z \in \mathbb{C}$.

Ú m l u v a : Řekneme-li diferenciál zobrazení f, míníme tím nadále diferenciál zobrazení $\tilde{f}(x,y) \overset{\text{df}}{=} f(x+{}+iy)$, tj. indukovaného zobrazení. Diferenciál $\mathrm{d}f_{(x,y)}(u,v)$ tohoto zobrazení $\tilde{f}$ je reálné lineární zobrazení Diferenciál funkce $\tilde{f}(x,y)$ zobrazuje $\mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ a platí

$$\tilde{f}(x+u, y+v) - \tilde{f}(x,y) - \mathrm{d}f_{(x,y)}(u,v) = o(\sqrt{u^2+v^2}); \quad (u,v) \to (0,0).$$

Pokud budeme mít na mysli diferenciál komplexní, uvedeme to explicitně. Komplexním diferenciálem zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ v bodě $w \in \mathbb{C}$ míníme komplexní lineární zobrazení $\mathrm{d}f_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, které splňuje

$f(w+h) - f(w) - \mathrm{d}f_w(h) = \eta_w(h)h$, kde η_w je v bodě w spojité zobrazení, které tam nabývá nulové hodnoty.

Cvičení: Spočtěte diferenciál zobrazení $f(z) = z/\overline{z}$. Ověřte, že diferenciálem[21] je $\mathrm{d}f_{(x,y)}(u,v) = = \frac{4xy^2-2x^2iy+2iy^3}{(x^2+y^2)^2}u + \frac{-4yx^2-2y^2ix+2ix^3}{(x^2+y^2)^2}v$. Dále ověřte, že tímto diferenciálem indukované zobrazení není komplexní lineární, neboť není $A + iB = 0$.

Poznámka : Tvrzení o ekvivalentní definici holomorfnosti lze přeformulovat pomocí komplexního diferenciálu. Funkce je holomorfní, právě když existuje její komplexní diferenciál.

Definice 10: „Směrové“ derivace funkcí komplexní proměnné
Nechť f je holomorfní, pak označme

$$\frac{\partial f}{\partial z} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{a dále} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Lemma (Holomorfnost $\Rightarrow$ existence diferenciálu):
Pokud f je holomorfní v bodě v, potom f má diferenciál (reálný) v bodě v.

Důkaz: Dle lemmatu existuje $A = \alpha + ai \in \mathbb{C}$ a φ spojitá a nulová v bodě v, že $f(v+h) - f(v) = = Ah + \varphi(v+h)h$. Uvažujeme-li f jako zobrazení $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$, pak diferenciál $\mathrm{d}f_v : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$. Snadno dokážeme, že diferenciálem je zobrazení

$$\mathrm{d}f_v(h_1, h_2) = (\alpha + ai)h_1 + (\alpha i - a)h_2 = A\ h_1 - iA\ h_2.$$

Lemma:
Nechť $z = x + iy$, $A, B \in \mathbb{C}$, potom

1. $Ax + By = \frac{1}{2}(A - iB)z + \frac{1}{2}(A + iB)\overline{z}$.
2. $\lim\limits_{z \to 0} z/\overline{z}$ neexistuje.

Důkaz: Ad 1: rovnost stačí rozepsat.
Ad 2: Spočtěme

$$\lim_{t\to 0} \frac{t+is}{t-is} \quad \text{pro } s = 0, \text{ limita vyjde } 1; \qquad \lim_{s \to 0} \frac{t+is}{t-is} \quad \text{pro} \quad t = 0, \text{ limita vyjde } -1.$$

Jelikož se limity liší podle toho, jaký směr přibližování jsme zvolili, limita neexistuje.

Věta 15: Cauchy–Riemannovy podmínky
Nechť $f : U(a) \to \mathbb{C}$. Pak $f'(a)$ existuje, právě tehdy když platí zároveň:

1. f má (reálný) diferenciál v bodě a a
2. $\partial f/\partial\overline{z}(a) = 0$ (Cauchy–Riemann).

Navíc pokud existuje $f'(a)$, pak platí $f'(a) = \partial f(a)/\partial z$.

Důkaz: $\Rightarrow$ Pokud existuje $f'(a)$, pak dle ekvivalentní definice derivace platí $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + + \eta_a(h)h$. Čtenář snadno ověří, že zobrazení

$$h = x + iy \mapsto f'(a)x + if'(a)y \tag{23}$$

je (reálný) diferenciál v bodě a. Jelikož víme, že reálný diferenciál je tvaru $x\partial f(a)/\partial x + y\partial f(a)/\partial y$, dostáváme z (23), že $i\partial f(a)/\partial x = -\partial f(a)/\partial y$, což je právě C.–R. podmínka.
$\Leftarrow$ Nechť f má reálný diferenciál v bodě a, tj.:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)u\ + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v + \eta_a(h),$$

[21] $\mathrm{d}f_{(x,y)}(u,v) = (\partial f/\partial x)u + (\partial f/\partial y)v$.

kde $h = u + iv$ a $\lim\limits_{h\to 0} \eta(h)/\|h\| = 0$. Předchozí rovnost lze přepsat na $f(a+h) - f(a) = h\partial f(a)/\partial z +$ $+ \overline{h}\partial f(a)/\partial\overline{z} + \eta(h)$. Užitím C.–R. podmínky a vydělením rovnosti h dostaneme, že

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\eta_a(h)}{h}.$$

Pravá strana má dle výše zmíněného limitu pro $h \to 0$, a proto i levá strana, která je derivací f v a, existuje a je rovna výrazu v tvrzení.

Úmluva: Symbolem $\triangle$ míníme v teorii funkcí komplexní proměnné operátor

$$\triangle \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Věta 16:
Platí, že

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{4}\triangle\,.$$

Důkaz: Pokud přiřadíte tomuto symbolickému zápisu matematický smysl, stačí levou stranu rozepsat.

Definice 11: Harmonická funkce
Funkci $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ nazveme harmonickou, pokud $\triangle f = 0$, tj. pokud řeší Laplaceovu rovnici.

Lemma:
Reálná a imaginární komponenta holomorfní funkce jsou harmonické funkce.

Důkaz: Pokud f je holomorfní, splňuje C.–R. podmínky, z čehož užitím předchozí věty získáme požadované tvrzení.

Poznámka: Pokud známe reálnou resp. imaginární část holomorfního zobrazení, jehož obor holomorfie je např. okolí, potom je jeho imaginární resp. reálná složka na tomto okolí určena řešením Laplaceovy rovnice.

Věta 17:
Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ je mocninná řada o poloměru konvergence $R > 0$. Označme $f(z) \overset{\text{df}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ definovanou na $U_R(a)$. Pak $f \in H\big(U_R(a)\big)$.

Důkaz: Pokud $0 < R' < R$, pak řada konverguje stejnoměrně na $U_{R'}(a)$, lze tedy užít věty o záměně derivace a sumy, tj. $\partial f/\partial\overline{z}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \partial\big(a_n(z-a)^n\big)/\partial\overline{z} = 0$, neboť $a_n(z-a)^n$ jsou holomorfní pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Ověřili jsme splnění C.–R. podmínek. Existence (reálného) totálního diferenciálu plyne ze spojitosti parciálních derivací podle x a y. Poznamenejme, že nevadí, že $R' < R$, neboť z minulého ročníku máme praxi v tom, jak oblast, kde platí tato věta, příslušně zvětšit na $U_R(a)$. (Nejsnadněji sporem.)

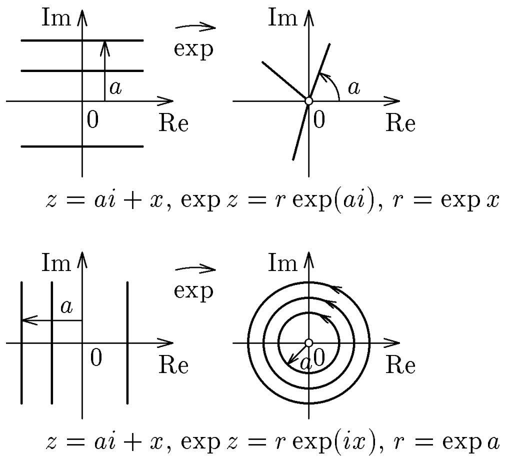
§6. Exponenciála, logaritmus a obecná mocnina

Příklad: Definujme následující zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

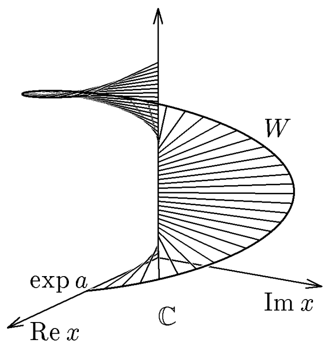
1. $e^z = \exp z \overset{\text{df}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/n!$;
2. $\sin z \overset{\text{df}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$, $\quad \cos z \overset{\text{df}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}/(2n)!$;
3. $\operatorname{tg} z \overset{\text{df}}{=} \sin z/\cos z$, $\quad \operatorname{cotg} z \overset{\text{df}}{=} \cos z/\sin z$,
4. $\cosh z \overset{\text{df}}{=} \operatorname{ch} z \overset{\text{df}}{=} \big(\exp z + \exp(-z)\big)/2$, $\quad \sinh z \overset{\text{df}}{=} \operatorname{sh} z \overset{\text{df}}{=} \big(\exp z - \exp(-z)\big)/2$.

Vhodným cvičením je určení definičních oborů příslušných zobrazení.

Příklad: Vyšetřeme chování exponenciály. Pro naše účely přijměme ekvivalentní definici exponenciály pomocí její reálné a komplexní části. Pro každé $x + iy = z \in \mathbb{C}$ platí: $\exp z = \exp x(i\sin y + \cos y)$.



Obrázek 4: Chování exponenciály na čtvercové síti



Obrázek 5: Zobrazení $\exp z$ množiny $\{z|\ \mathrm{Re}\, z \in (-\infty; a),\ \mathrm{Im}\, z \in (0; 2\pi)\}$.

Rovnoběžky s imaginární osou, tj. $z = a + iy$, $y \in \mathbb{R}$, které jsou od ní vzdáleny a, se zobrazí na kružnice (někonečněkrát obkroužené) o středu v počátku a poloměru $r = a$. Pokud přímky leží v pravé polorovině komplexní roviny, pak se zobrazí na kružnice, jejichž poloměr se bude zmenšovat tak, jak budou přicházet k imaginární ose (zprava). Po splynutí s imaginární osou, která se zobrazí na jednotkovou kružnici, kdy se přímky budou dále pohybovat doleva k reálnému $-\infty$, se bude poloměr kružnic zmenšovat, v limitě půjde k nule. Zobrazujeme-li rovnoběžky s reálnou osou, tj. přímky $z = x + ai$, $x \in \mathbb{R}$, jejich obrazy jsou polopřímky. Nevlastním počátkem těchto polopřímek je počátek. S tím jak se přímky pohybují směrem vzhůru, se polopřímky otáčejí kolem osy kolmé k osám komplexní roviny proti směru otáčení hodinových ručiček. Z výše popsaného plyne, že exponenciála není prostá funkce na $\mathbb{C}$, neboť např. rovnoběžky s reálnou osou, které jsou vzdáleny od sebe o 2π, se zobrazí na tutéž polopřímku.

Pokusme se představit si exponenciálu jako zobrazení $\mathbb{C} \to W$, kde W je (v jistém smyslu) plocha rozprostřená nad komplexní rovinou, aby se toto „nové“ zobrazení jevilo jako injektivní, a tak umožnilo definovat jeho inverzi. S tím, jak se pohybujeme spolu s přímkami rovnoběžnými s reálnou osou vzhůru, natáčí se jejich obraz (polopřímka) ve směru otáčení hodinových ručiček. Pokud je vzdálenost (orientovaná) zobrazované přímky od reálné osy a, je úhel, který svírá obraz s reálnou osou, také a. Pozměňme následovně výše popsané zobrazení: polopřímku, která je obrazem příslušné přímky vzdálené a od reálné osy, posuňme rovnoběžně podél osy z (která tvoří pravotočivý systém s reálnou a imaginární osou) o a vzhůru. Obrazy všech přímek rovnoběžných s reálnou osou vytvoří, obrazně řečeno, jakési schodiště. Pásy o šířce 2π se zobrazí do příslušných pater schodiště.

Definice 12: Jednoznačná větev argumentu
Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$. Pak *jednoznačnou větví argumentu* pro úhel φ, kterou označíme $\arg_\varphi$, rozumíme zobrazení,

které každému nenulovému bodu $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ přiřadí reálné číslo y, pro které platí

$$\frac{w}{|w|} = \exp iy$$

a zároveň $y \in \langle \varphi; \varphi + 2\pi)$. Pro $\varphi = -\pi$ funkci značíme arg a nazýváme ji *hlavní větví argumentu.*

Poznámka: Názorně řečeno, pokud si zvolíme číslo φ a bod $w \neq 0$ v komplexní rovině, argument w pro úhel φ nalezneme tak, že vystoupáme do patra[22] $[\varphi/2\pi]$ (přízemí považujeme za nulté patro, suterén za minus první, jinak lze užít běžné konvence, známé např. z panelových domů) a pak vystoupáme ještě tak vysoko, abychom se od naší orientace, nabyté při vstupu do příslušného patra, otočili právě o úhel α, kde $\exp i\alpha = w/|w|$ a $\alpha \in \langle 0; 2\,\pi)$. Výška naší pozice udává příslušnou hodnotu argumentu v bodě w pro úhel φ. Zkoušku správnosti lze provést např. tehdy, pokud v daném nadzemním patře máme s sebou stopky a odpor vzduchu je možné zanedbat.

Jiná možnost je chápat argument komplexního čísla a jako úhel, který svírá polohový vektor a v rovině komplexních čísel s kladnou reálnou poloosou („polární souřadnice"). Žádáme ale, aby tento úhel ležel v intervalu $(\varphi; \varphi + 2\pi)$. Pokud sledujeme například argument komplexní jednotky $\exp(ix)$, vidíme, že vždy, když je $x = \varphi + 2\pi k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, dochází ke „skoku" mezi φ a $\varphi + 2\pi$. Naproti tomu, pokud se pohybujeme po schodišti, ke skokům nedochází.

Poznámka: Všimněme si, že zobrazení $\arg_\varphi w$ není spojité na polopřímce $\{r \exp i\varphi |\ r > 0\}$.

Definice 13: Jednoznačná větev logaritmu
Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$. Pak definujme *jednoznačnou větev logaritmu* $\log_\varphi$ pro úhel φ předpisem

$$\log_\varphi w = \ln |w| + i \arg_\varphi w,$$

kde $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pokud $\varphi = -\pi$, pak funkci označujeme Log a nazýváme ji *hlavní větví logaritmu.*

Poznámka: Uvažujme restrikci $\exp'$ exponenciály. $\exp' : O_\varphi \to \mathbb{C} \setminus \Omega_\varphi$, kde

$$O_\varphi \stackrel{\text{df}}{=} \{z |\ \operatorname{Re} z \in (\varphi; \varphi + 2\pi)\}, \qquad \Omega_\varphi \stackrel{\text{df}}{=} \{r \exp i\varphi |\ r \geq 0\}.$$

Tato restrikce je prosté zobrazení. Navíc evidentně platí, že $\log_\varphi(w) = \big(\exp |O_\varphi\big)^{-1}(w)$, pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega_\varphi$.

Věta 18: Holomorfnost logaritmu
Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$. Pak $\log_\varphi$ je holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus \Omega_\varphi$. Navíc na $\mathbb{C} \setminus \Omega_\varphi$ platí

$$\big(\log_\varphi w\big)' = \frac{1}{w}.$$

Důkaz: Důkaz proveďme pro Log. Chceme ověřit předpoklady bodu 6 věty o algebraických vlastnostech derivace (14). Spojitost funkce Log: zvolme libovolný kruh K_1 v $\mathbb{C} \setminus \Omega_{-\pi}$ o poloměru ε; do něj vepišme čtverec, jehož strany jsou rovnoběžné s osami komplexní roviny. Exponenciála zobrazí tento čtverec na výseč mezikruží (viz obr. 4), kterému zřejmě lze vepsat kruh K_2 o jistém poloměru δ. Logaritmus tento kruh K_2 zobrazí do kruhu K_1, čímž je spojitost dokázána. Je zřejmé, že log je zároveň bijekce. Protože víme, že derivace exponenciály je exponenciála, tj. zobrazení které nenabývá v $\mathbb{C}$ nulové hodnoty, můžeme užít tvrzení věty o derivaci inverzní funkce: $\log_\varphi'(w) = 1/\exp'\big(\log_\varphi(w)\big) = 1/w$, cbd.

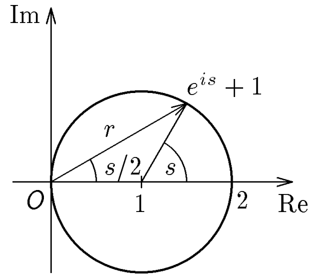
Lemma:
Pokud je $f \in H\big(U(a)\big)$ a $\big(\forall z\ \in U(a)\big)\big(f'(z) = 0\big)$, pak $(\exists C \in \mathbb{C})\big(\forall z\ \in U(a)\big)\big(f(z) = C\big)$.

Důkaz: C.–R. podmínky spolu s nulovostí derivace implikují:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Z reálné analýzy víme, že to značí, že $f = \text{const}$.

[22] $[x]$ je celá část reálného čísla — zaokrouhlování na celá čísla dolů.



Obrázek 6: K výpočtu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin nt)/(n)$.

Příklad: Připomínáme, že pro $|z|<1$ platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ na otevřené kružnici o poloměru konvergence $R=1$. Zároveň je nám známo, že pro $z=1$ výše uvedená řada diverguje (a rovnost nahoře nemá smysl).

Cvičení: Dokažte, že $\left(\forall z \in U_1(0)\right)\left(-\operatorname{Log}(1-z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\right)$. Užijte věty o záměně sumy a derivace a předchozí věty (18).

Poznámka: Zabývejme se tím, jak se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ chová na hranici kruhu konvergence. Víme, že v bodě $z=1$ diverguje a v bodě $z=-1$ konverguje k $-\ln 2$, jak jsme si rozmysleli v druhém semestru. Z definice logaritmu plyne, že $\operatorname{Log}(1-z)$ je definován i pro $|z|=1 \wedge z \neq 1$. Užijeme-li Abel–Dirichletova kritéria (z druhého semestru) a uvážíme, že součty $\sum\limits_{k=1}^{n} z^k$ jsou stejnoměrně omezené na množině $|z| \leq 1 \ \wedge |z-1|<\varepsilon$, dospějeme k tomu, že řada konverguje i pro $|z|\leq 1 \ \wedge z \neq 1$.

Poznámka: Proveďme následující důležitý výpočet. Nechť $s \in (-\pi;\pi)$.

$$-\operatorname{Log}\left(1+\exp is\right) = -\operatorname{Log}\left(1-\exp i(s-\pi)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp in(s-\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(s-\pi)}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(s-\pi)}{n}.$$

Spočtěme $-\operatorname{Log}(1+\exp is)$ z definice a užijme obr. 6

$$-\operatorname{Log}\left(1+\exp is\right) = -\ln r - i\frac{s}{2} = -\ln\left(2\cos\frac{s}{2}\right) - i\frac{s}{2}.$$

Srovnáním reálné a imaginární části výsledků těchto dvou různých výpočtů obdržíme následující poučky (první z nich jsme potřebovali v kapitole o Fourierových řadách):

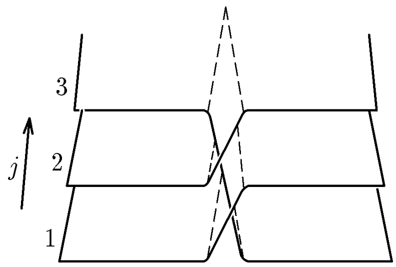
$$-\frac{s}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(s-\pi)}{n}, \qquad -\ln\left(2\cos\frac{s}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(s-\pi)}{n}.$$

Substitucí $t \overset{\mathrm{df}}{=} \pi - s$ získáme formule [pro $t \in (0;2\pi)$]

$$\frac{\pi-t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}, \qquad -\ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n}. \tag{24}$$

Definice 14: Obecná mocnina
Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Pak existuje *jednoznačná větev obecné mocniny* definovaná vztahem $z^\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} e^{\alpha \ln_\varphi z}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_\varphi$.

Poznámka: Pro z^n, $n \in \mathbb{Z}$ je tato definice ve shodě s definicí pomocí násobení. Celé mocniny jsou jednoznačné funkce na celé komplexní rovině, pro $n=-1,0,1$ prosté. Vyšší mocniny „navíjejí“ komplexní



Obrázek 7: Model n-té odmocniny pro $n = 3$.

rovinu samu na sebe — množina $\mathbb{R} \times \langle \varphi, \varphi + \frac{2\pi}{n})$ se zobrazuje na celou komplexní rovinu, čili oběhne-li z jednou kolem počátku, oběhne z^n n-krát.

Odtud je vidět, že naopak celé odmocniny $\sqrt[n]{z}$ jednoznačnými funkcemi nejsou, protože celá komplexní rovina se může v závislosti na volbě φ v definici jednoznačné větve obecné mocniny zobrazit na různé množiny $\mathbb{R} \times \langle \varphi, \varphi + \frac{2\pi}{n})$. Celou situaci můžeme nahlížet ještě trochu jinak — jako kdyby n-tá odmocnina nebylo zobrazení z $\mathbb{C}$, ale z plochy vzniklé položením n kopií $\mathbb{C}$ (listů) nad sebe, rozstřižením těchto listů v kladných reálných poloosách a sešitím tak, aby ta strana střihu $(j+1)$-ního listu, obsahující kladné imaginární části, byla napojena na stranu j-tého listu se zápornými imaginárními částmi. Kladnou stranu prvního listu ztotožníme se zápornou stranou n-tého listu (což v $\mathbb{R}_3$ nejde nakreslit, viz obrázek 7). Jednotková kružnice se tím transformuje ve šroubovici o n otáčkách, jejíž poslední bod je ztotožněn s prvním. Každý list se pak zobrazuje na množinu $\langle 2\pi(j-1)/n; 2\pi j/n)$. Bod této plochy zobrazíme tak, že z něj spustíme kolmici k „zemi“ (horizontální rovině) a vezmeme její patu[23]. Zavedením této tzv. Riemannovy plochy mocniny má tu výhodu, že se body u střihů už ničím neodlišují od ostatních bodů a funkce je v nich také spojitá.

§7. Komplexní diferenciální formy a Stokesova věta

Definice 15: Diferenciální formy nad $\mathbb{C}$
Definujme komponenty

$$E^0_C(\Omega) \stackrel{\text{df}}{=} \{f \mid f : \Omega \subseteq \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}, \Omega \text{ otevřená}, f \in C^\infty\}$$
$$E^1_C(\Omega) \stackrel{\text{df}}{=} \{\omega \mid \omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y, f, g \in E^0_C(\Omega)\}$$
$$E^2_C(\Omega) \stackrel{\text{df}}{=} \{\omega \mid \omega = f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, f \in E^0_C(\Omega)\}$$

algebry $E^*_C \stackrel{\text{df}}{=} E^0_C \oplus E^1_C \oplus E^2_C$ komplexních diferenciálních forem. Integrál a vnější diferenciál z formy $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ definujeme přirozeně po složkách

$$\int \omega \stackrel{\text{df}}{=} \int \omega_1 + i \int \omega_2, \qquad \mathrm{d}\omega \stackrel{\text{df}}{=} \mathrm{d}\omega_1 + i\,\mathrm{d}\omega_2.$$

Poznámka: Nekonečnou diferencovatelnost do definice E^0_C zavádíme pouze pro pohodlí, v dalším nám budou vždy stačit slabší předpoklady.

Věta 19: Stokesova
Buď $\omega \in E^k_C(\mathbb{R}^2)$, $S \subseteq \mathbb{R}_2$ zobecněná plocha, $\dim S = k+1$ (tedy $k \in \{0,1\}$). Pak

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S \mathrm{d}\omega.$$

Důkaz: Rozepsáním na součet reálné a imaginární části se snadno převede na Stokesovu větu z minulého

[23] Nyní mluvíme pouze o argumentu odmocniny, nikoliv o absolutní hodnotě.

semestru. Jak je vidno z jejího důkazu, stačí předpokládat pouze existenci první spojité derivace složek formy ω na nějaké otevřené nadmnožině S.

P o z n á m k a : V další definici se nám budou hodit diferenciály identity $\mathrm{d}z = \mathrm{d}(x+iy) = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$ a komplexního sdružení $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}(x-iy) = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$.

Definice 16:
Definujme rozklad $E^1_C(\Omega) = E^{1,0}_C(\Omega) \oplus E^{0,1}_C(\Omega)$ na dva podprostory $E^{1,0}_C(\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \{f\,\mathrm{d}z\}$ a $E^{0,1}_C \overset{\mathrm{df}}{=} \{f\,\mathrm{d}\overline{z}\}$, kde $f \in E^0_C(\Omega)$. Dále definujme zobrazení $\partial : E^0_C \to E^{1,0}_C$, $\partial : E^{0,1}_C \to E^2_C$; $\overline{\partial} : E^1_C \to E^{0,1}_C$, $\overline{\partial} : E^{1,0}_C \to E^2_C$ předpisem

$$\partial f \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z, \qquad \partial(f\,\mathrm{d}\overline{z}) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z},$$
$$\overline{\partial} f \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}, \qquad \overline{\partial}(f\,\mathrm{d}z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z.$$

P o z n á m k a : Situaci zachycuje následující schéma:

$$\begin{array}{ccccc}
E^0_C & \xrightarrow{\mathrm{d}} & E^1_C & \xrightarrow{\mathrm{d}} & E^2_C \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 & \partial \nearrow & E^{1,0}_C & \searrow \overline{\partial} & \\
E^0_C & & \oplus & & E^2_C \\
 & \overline{\partial} \searrow & E^{0,1}_C & \nearrow \partial &
\end{array}$$

Snadno se přesvědčíme, že zobrazení d lze skutečně rozložit na součet zobrazení ∂ a $\overline{\partial}$. Pro $f \in E^0_C$ můžeme psát

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z})\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z})\frac{\partial f}{\partial y} =$$
$$= \mathrm{d}z\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) + \mathrm{d}\overline{z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \mathrm{d}z\,\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{d}\overline{z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \partial f + \overline{\partial} f.$$

Případ $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ ponecháváme za cvičení.

Věta 20: Cauchy–Riemannovy podmínky v jazyce forem

1. Nechť $f \in E^0_C(\Omega)$. Pak $\overline{\partial} f = 0$, právě když f je holomorfní; jinými slovy $H(\Omega) \cap E^0_C(\Omega) = \operatorname{Ker}\overline{\partial}$.
2. Nechť $\omega \in E^{1,0}_C(\Omega)$ ($\omega = f\,\mathrm{d}z$). Pak $\mathrm{d}\omega = 0$, právě když $f \in \operatorname{Ker}\overline{\partial}$.
3. $\omega \in E^{1,0}_C$ je exaktní, právě když k f existuje primitivní funkce na Ω.

Důkaz:

1. Podle věty (15) je funkce holomorfní právě tehdy, má-li totální diferenciál a platí-li $\partial f/\partial\overline{z} = 0$. Druhá podmínka je pouze jiný zápis $\overline{\partial} f = 0$, první je splněna díky existenci všech spojitých derivací (stačí jedna, viz druhý semestr).
2. Pouze rozepisujeme podle definic:
$$0 = \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}z) = \overline{\partial}(f\,\mathrm{d}z) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z = \overline{\partial} f \wedge \mathrm{d}z.$$
V třetí rovnosti jsme mohli zaměnit d za $\overline{\partial}$, protože $\overline{\partial}$ je projekcí zobrazení d na $E^{1,0}_C$, kam náleží $f\,\mathrm{d}z$.
3. $\omega = f\,\mathrm{d}z$ je exaktní $\Leftrightarrow (\exists F \in E^0_C)(\omega = \mathrm{d}F)$. Pokud ω je exaktní a z $E^{1,0}_C$, lze psát $\mathrm{d}F = (\partial F/\partial z)\,\mathrm{d}z$, a tedy $f = F'$, primitivní funkce je nalezena. Naopak, pokud k f existuje F, že $f = F'$, je $\omega = (\partial f/\partial z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}F$, tedy ω je exaktní.

P o z n á m k a : Poslední větu můžeme přeformulovat také tak, že holomorfní funkce jsou právě ty, pro něž je křivkový integrál podél hranice ∂O oblasti O nulový. Skutečně, je-li $\omega \in E_C^{1,0}(\Omega)$, O otevřená a $\overline{O} \subseteq \Omega$ (tedy i $\partial O \subset \Omega$), pak podle Stokesovy věty $\int_{\partial O} \omega = \int_O \mathrm{d}\omega = 0$.[24] Definujeme-li křivkový integrál funkce f pomocí parametrizace $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \mapsto \mathbb{C} \cong \mathbb{R}_2$ vztahem

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \,\mathrm{d}t,$$

bude tento záviset pouze na bodech α a β, ne už na tvaru křivky γ. Je-li funkce f holomorfní až na konečný počet bodů, bude křivkový integrál podél uzavřené křivky γ záviset pouze na chování f v okolí těchto bodů. Křivku γ můžeme totiž v oblasti, kde je f holomorfní, libovolně posouvat a stáhnout ji tak na křivku $\widetilde{\gamma}$, která těsně obepíná tyto body a integrál podél ní je stejný jako podél γ.

§8. Cauchyova věta: Cauchyho integrální formule

Věta 21: Pomocná tvrzení pro práci s křivkovými integrály
Nechť $f \in E_C^0(\mathbb{C})$, γ po částech spojitě diferencovatelná rektifikovatelná[25] křivka v $\mathbb{C}$.

1. $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le l(\gamma) \max\limits_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)|$, kde $l(\gamma)$ je délka křivky γ a $\langle\gamma\rangle$ množina jejích bodů.
2. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\gamma\rangle$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.
3. Nechť $\sum\limits_1^n f_i \rightrightarrows f$ na $\langle\gamma\rangle$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_1^n \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Důkaz:

1. $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\alpha^\beta \left|f\big(\gamma(t)\big)\right| \cdot \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t \le \max\limits_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)| \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| = l(\gamma) \max\limits_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)|$.
2. Protože $\gamma(t)$ je spojitě diferencovatelná, a tudíž má na uzavřeném intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ omezenou derivaci, $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\gamma\rangle$ implikuje $f_n\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \rightrightarrows f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Podle věty z kapitoly o stejnoměrné konvergenci z druhého semestru lze v Riemannově integrálu stejnoměrně konvergentní řady zaměnit pořadí sčítání a integrace, čímž je věta dokázána.
3. Důsledek bodu 2.

Definice 17: Cesta
Cestou rozumějme spojitou po částech spojitě diferencovatelnou regulární křivku. *Prostá uzavřená cesta* pak buď taková cesta, která je vzájemně jednoznačným zobrazením $(\alpha,\beta) \to \mathbb{C}$ a $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Definice 18: Oblast s po částech hladkou hranicí
Nechť $O \subseteq \mathbb{C}$ oblast (otevřená souvislá množina). Řekneme, že O má *po částech hladkou hranici* $\partial O \subset \mathbb{C}$, pokud existuje konečně mnoho prostých uzavřených cest $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, že $\partial O = \langle\gamma_1\rangle \cup \langle\gamma_2\rangle \cup \ldots \cup \langle\gamma_k\rangle$, přičemž $\langle\gamma_i\rangle$ jsou po dvou disjunktní.

P o z n á m k a : Křivky γ_i orientujeme tak, aby báze $(\vec{n}, \vec{\tau})$ byla kladně orientovaná (pravotočivá) v $\mathbb{R}_2$ ($\vec{n}$ je normálový a $\vec{\tau}$ tečný vektor). Jednoduché mnemotechnické pravidlo říká, že při obcházení oblasti po její hranici musíme mít oblast po levé ruce — srovnejte s obr. 8. Upozorňujeme, že někdy se užívá i jiné konvence, která v $\mathbb{R}_2$ vede k opačným výsledkům: orientace báze nadplochy, která je hranicí oblasti, je stejná jako orientace báze celého prostoru vzniklé připsáním vektoru vnější normály *za* bázi nadplochy.

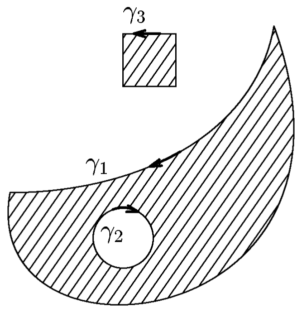
Věta 22: Stokes $\equiv$ Green
Nechť $O \subseteq \mathbb{C}$ je oblast s po částech hladkou hranicí a nechť existuje oblast $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ taková, že $\overline{O} \subset \Omega$. Pak pro $\omega \in E_C^1(\Omega)$ platí

$$\int_{\partial O} \omega = \int_O \mathrm{d}\omega.$$

Důkaz: Bez důkazu.

[24] Říkáme podle Stokesovy věty, ale uvědomme si, že její v tomto paragrafu dokázaná varianta nebude stačit, neboť předpokládáme pouze holomorfnost, nikoliv spojitou diferencovatelnost. Její zesílení je předmětem paragrafu následujícího.

[25] Mající délku.



Obrázek 8: Oblasti s kladně orientovanou po částech hladkou hranicí

Poznámka: Problémovým bodem v důkazu této věty by bylo ukázat, že O je zobecněná plocha ve smyslu definice z minulého semestru. Tuto skutečnost většina čtenářů asi přijme jako relativně přirozenou a ve všech konkrétních případech, kde se to později používá, to bude zřejmě pravda. Také nedělá žádný problém dokázat větu (22) i pro formy ω, jejichž koeficienty jsou jen spojitě diferencovatelné (a ne C^∞, jak jsme předpokládali). Důkaz je stejný. My ale zatím nevíme, že holomorfní funkce jsou spojitě diferencovatelné (dokonce z C^∞). Víme jenom, že koeficienty f, g formy ω mají totální diferenciál. Následující věta je první krok k tomu ukázat, že holomorfní funkce jsou hladké. Na jejím důkazu se nic nového o holomorfních funkcích nepochopí, nebudeme ho tedy dělat.

Věta 23: Goursatova
Nechť $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$, f, g mají totální diferenciál v oblasti Ω. Nechť O je oblast s po částech hladkou hranicí, $\overline{O} \subset \Omega$, $\mathrm{d}\omega = 0$ v O. Pak $\int_{\partial O} \omega = 0$.

Věta 24: Cauchyova
Nechť Ω je oblast, $f \in H(\Omega)$, O oblast s po částech hladkou hranicí taková, že $\overline{O} \subseteq \Omega$. Pak

$$\int_{\partial O} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz: Je-li f holomorfní, pak $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$ je uzavřená, její koeficienty mají totální diferenciál (viz C.–R. podmínky) a lze tedy použít větu (23).

Příklad: Budeme zkoumat celé mocniny na jednotkovém kruhu $O = U_1(0) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ s hranicí $\partial O = K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$, přesněji řečeno funkce $z^{m-1}/(2\pi i)$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Integrál

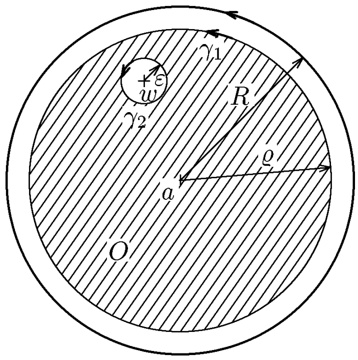
$$\int_{\partial O} z^{m-1} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \left(e^{it}\right)^{m-1} ie^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt}\,\mathrm{d}t,$$

kde jsme zavedli parametrizaci $z = \gamma(t) = e^{it}$, je roven jedné pro $m = 0$ a nule pro všechny ostatní hodnoty m. Pro kladná m je nulovost tohoto integrálu též důsledkem Cauchyho věty.

Věta 25:
Nechť f je definovaná na Ω a má tam primitivní funkci F. Pak pro každou regulární křivku $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbb{C}$ platí $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$, specielně pro uzavřenou křivku je integrál nulový.

Důkaz: Protože $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, lze ve vyjádření křivkového integrálu pomocí Riemannova použít Newtonovu formuli a obdržet tak tvrzení věty.

Poznámka: Primitivní funkce k $\frac{1}{z}$ $(m = 0)$ je víceznačná, proto se na ni předchozí věta tak, jak byla vyslovena, nevztahuje. Pokud ji ale neformálně zavedeme, vyjde to správně — skok logaritmu při oběhnutí po jednotkové kružnici je roven hodnotě křivkového integrálu $\int_{K_1(0)} \frac{\mathrm{d}z}{z}$.



Obrázek 9: Oblasti integrace pro důkaz Cauchyho integrální formule.

Věta 26: Cauchyho integrální formule pro kruh
Nechť $f \in H\big(U_R(a)\big)$, $\rho \in (0, R)$ pevné. Pak $\forall w \in \mathrm{U}_\rho(a)$ platí

$$f(w) = \int_{K_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}. \tag{25}$$

Důkaz: Volme $\varepsilon > 0$ libovolné takové, že $U_\varepsilon(w) \subset U_\rho(a)$ a označme $\gamma_1(t) = a + \rho e^{it}$ parametrizaci $K_\rho(a)$ a $\gamma_2(t) = w + \varepsilon e^{it}$ parametrizaci $K_\varepsilon(w)$, v obou případech $t \in (0; 2\pi)$. Situace je znázorněna na obrázku 9. Integrand je holomorfní v $O \equiv U_\rho(a) \setminus \overline{U_\varepsilon(w)}$, tedy podle Cauchyho věty $0 = \int_{\partial O} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$, po úpravě

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \int_{\gamma_2} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} + \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}.$$

Druhý sčítanec je po provedení integrace (viz příklad) roven $f(w)$, první můžeme shora odhadnout pomocí věty (21):

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} \right| \leq 2\pi\varepsilon \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \langle\gamma\rangle} \left| \frac{f(z) - f(w)}{\varepsilon} \right| = \max_{z \in \langle\gamma\rangle} |f(z) - f(w)| \,.$$

Holomorfní funkce je spojitá, proto je poslední výraz, a tedy i celý integrál menší než libovolně malé $\tilde{\varepsilon}$. Zbylé dva integrály ovšem na ε nezávisí, a tudíž ani odhadovaný integrál nezávisí na $\tilde{\varepsilon}$, a musí být nulový, což jsme měli dokázat.

Poznámka: Cauchyho integrální formule ukazuje, že holomorfní funkce je plně zadána svými hodnotami na uzavřené křivce a uvnitř je rovna superpozici funkcí $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-w}$ se středy z na této křivce a amplitudami $f(z)$.

Rovněž z tohoto tvrzení plyne, že holomorfní funkce má hodnoty uvnitř kruhu zadané již hodnotami na hranici kruhu a též že holomorfní funkce je v tomto kruhu nekonečně diferencovatelná, neboť i funkce $f(w) = 1/(z-w)$ je nekonečně diferencovatelná.

§9. Taylorovy řady

Věta 27: Souvislost holomorfních funkcí s Taylorovými řadami
Nechť Ω oblast, $f \in H(\Omega)$, $U_R(a) \subseteq \Omega$. Pak existuje právě jedna komplexní posloupnost $\{c_n\}_0^\infty$, že $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ na $U_R(a)$. Navíc lze koeficienty c_n vyjádřit ve tvarech

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \int_{K_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}.$$

Důkaz: Podle vět o mocninných řadách víme, že pokud řada příslušná dané funkci existuje, pak je právě jedna a má koeficienty $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Stačí tedy dokázat existenci. Volme $\rho \in (0, R)$ a $w \in U_\rho(a)$ pevné.

Pro $z \in K_\rho(a)$ je $|(w-a)/(z-a)| < 1$ a můžeme tedy rozvíjet do geometrické řady:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n .$$

Z Cauchyho integrální formule pak plyne

$$f(w) = \int_{K_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \int_{K_\rho(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} (w-a)^n \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{K_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} \right) (w-a)^n .$$

Záměnu limity a integrálu můžeme provést, protože geometrická řada jakožto funkce z konverguje stejnoměrně k svému součtu pro $z \in K_\rho(a)$ (její kvocient je v absolutní hodnotě omezený číslem menším než jedna, protože w leží uvnitř kruhu). Dostáváme tak vyjádření $f(w)$ pomocí mocninné řady, jejíž koeficienty musí být vzhledem k jednoznačnosti rovny $f^{(n)}(a)/n!$.

Poznámka: Pokud definujeme reálnou exponenciálu a reálné goniometrické funkce pomocí jejich Taylorovy řady, můžeme tuto definici díky výsledkům tohoto paragrafu rozšířit do celé komplexní roviny. Okamžitě vidíme, že veškeré součtové a další vzorce budou platit i tam.

§10. Laurentovy řady

Definice 19: Laurentova řada
Řada typu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, kde $a, c_n \in \mathbb{C}$ se nazývá *Laurentovou řadou* okolo bodu a. Řekneme, že Laurentova řada konverguje v bodě $z \in \mathbb{C}$, právě když konverguje řada $S_+ \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ a řada $S_- \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$. Součtem Laurentovy řady pak nazveme číslo $S_+ + S_-$.
Řada S_+ se nazývá *regulární část* Laurentovy řady okolo bodu a, řada S_- se pak nazývá *hlavní část* Laurentovy řady funkce okolo bodu a.

Věta 28: Mezikruží konvergence Laurentovy řady
Pro každou Laurentovu řadu existuje právě jedna dvojice čísel $\rho, R \in \langle 0, \infty \rangle$ splňující

1. Řada konverguje pro všechna $z \in U_{\rho,R}(a) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{z \in \mathbb{C} |\ \rho < |z-a| < R\}$.
2. Řada S_+ diverguje pro všechna z, pro něž $|z-a| > R$.
3. Řada S_- diverguje pro všechna z, pro něž $|z-a| < \rho$.

Důkaz: Podle vět o mocninných řadách existuje právě jeden poloměr konvergence R řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Podobně existuje právě jedno R', že $\forall z,\ \frac{1}{z-a} < R'$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\left(\frac{1}{z-a}\right)^n$. Zjevně pak $\rho = 1/R'$.

Poznámka: Je-li $f(z)$ součtem Laurentovy řady na $U_{\rho,R}(a)$, je tam též holomorfní, protože je součtem součtů dvou mocninných řad.

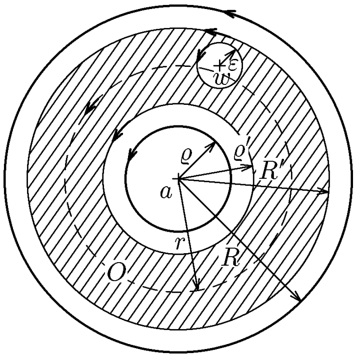
Věta 29: Laurentova řada funkce
Nechť $\rho, R \in \langle 0, \infty \rangle$, $\rho < R$, $f \in H\big(U_{\rho,R}(a)\big)$. Pak $\exists!\ \{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ z $\mathbb{C}$, že $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ na $U_{\rho,R}(a)$.
Koeficienty c_n lze vyjádřit vzorcem

$$c_n = \int_{K_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i},$$

kde $r \in (\rho, R)$ je libovolné.

Důkaz: Předpokládejme pro pohodlí $a = 0$. Nechť w je libovolný bod $U_{\rho,R}(a)$. Zvolme ρ', R' takové, že $\rho < \rho' < R' < R$ a ε takové, aby $U_\varepsilon(w) \subset U_{\rho',R'}(a)$. Nyní uvažujme množinu $O = U_{\rho',R'}(a) \setminus \overline{U_\varepsilon(w)}$ — viz obrázek (10). Podle Cauchyho věty

$$0 = \int_{\partial O} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \int_{K_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} - \int_{K_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} - \int_{K_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}.$$



Obrázek 10: Oblasti integrace k důkazu věty o vzorcích pro koeficienty Laurentovy řady.

Cauchyho integrální formule nám umožňuje interpretovat poslední integrál a psát

$$f(w) = \int_{K_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \int_{K_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z-w}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} - \int_{K_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{z-w}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}.$$

V prvním integrálu je $|z| > |w|$, proto

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{w}{z}} = \sum_0^\infty \frac{w^n}{z^{n+1}}$$

Analogicky v druhém integrálu $|z| < |w|$, tedy $\frac{1}{z-w} = -\sum_0^\infty \frac{z^n}{w^{n+1}}$. Dosadíme-li tyto rozvoje do vyjádření $f(w)$ a prohodíme-li sumaci a integrál (stejnoměrná konvergence geometrické řady, což je majoranta), dostáváme

$$f(w) = \sum_{n=0}^\infty \left[\int_{K_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} w^n \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} + \int_{K_{\rho'}(a)} f(z) z^n \frac{1}{w^{n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}\right] = \sum_{n=-\infty}^\infty \left[\int_{K_r(a)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}\right] w^n.$$

Poslední úpravou jsme nejprve přesunuli integrační cestu na společný kruh $K_r(a)$, kde $r \in (\rho', R')$ libovolné, což je umožněno holomorfností f v $U_{\rho',R'}(a)$. Nakonec jsme přeindexovali členy druhé řady.

Příklad: Jednoznačnost Laurentových řad nám je často umožňuje efektivně hledat bez namáhavé integrace. Máme například rozvést do řady v okolí nuly funkci $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Tato funkce je holomorfní všude mimo body $0+i0$ a $1+i0$, budeme ji tedy rozvíjet jednak na $U_{0,1}(0)$ a jednak na $U_{1,\infty}(0)$. V prvním případě

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^\infty z^n,$$

ve druhém

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \cdots$$

Pokud budeme chtít stejnou funkci rozvíjet kolem jiného bodu, řekněme kolem $2+i0$, stačí jen provést několik standardních triků. Nejprve zadanou funkci rozložíme na parciální zlomky a ve všech výrazech přičteme a odečteme bod, okolo nějž budeme rozvíjet:

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{(z-2)+2} + \frac{1}{(z-2)+1}$$

Každý z těchto dvou parciálních zlomků chceme rozvíjet pomocí geometrické řady, k tomu ovšem potřebujeme, aby byl kvocient v absolutní hodnotě menší než 1. Například druhý zlomek lze rozvíjet

$$\frac{1}{(z-2)+1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (z-2)^n$$

pro $|z-2|<1$ a

$$\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}$$

pro $|z-2|>1$. Podobně první zlomek rozvineme pro $|z-2|<2$ a $|z-2|>2$:

$$-\frac{1}{(z-2)+2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\frac{1}{(-2)^{n+1}}$$

$$-\frac{1}{(z-2)+2}=-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}.$$

Laurentovy řady funkce $\frac{1}{z(z-1)}$ na mezikružích $|z-2|<1$, $1<|z-2|<2$ a $2<|z-2|$ pak jsou

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\frac{1}{(-2)^{n+1}},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\frac{1}{(-2)^{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}.$$

§11. Klasifikace izolovaných singularit

Definice 20: Typy singularit

Řekneme, že $f(z)$ má v bodě $a\in\mathbb{C}$ *izolovanou singularitu*, pokud $\exists R>0$, že $f\in H\big(U_{0,R}(a)\big)$. Izolovaná singularita se nazývá *odstranitelnou singularitou*, pokud koeficienty Laurentovy řady $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ na $U_{0,R}(a)$ jsou nulové pro $n<0$, *pólem*, pokud $(\exists n_0<0)\big(c_{n_0}\neq 0\wedge(\forall n<n_0)(c_n=0)\big)$ a *podstatnou singularitou*, pokud $(\forall n<0)(\exists m<n)(c_m\neq 0)$.

Poznámka: Označme $N=\inf\{n|\ c_n\neq 0\}\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$, kde c_n jsou koeficienty Laurentovy řady funkce $f(z)$. Pokud $N>0$, pak říkáme, že f má v a kořen násobnosti N, pokud $N<0$, mluvíme o pólu *násobnosti* (či řádu) $|N|$ a $N=-\infty$ znamená podstatnou singularitu. Poslední zbývající případ, $N=0$, ačkoliv je nejdůležitější, nemá samostatný název: hovoříme prostě o funkci holomorfní a různé od nuly.

Věta 30: Riemann

Nechť f má v bodě $a\in\mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Pak jsou ekvivalentní tato tři tvrzení:

1. f má v a odstranitelnou singularitu.
2. Existuje $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.
3. f je omezená na určitém $U_{0,R}(a)$.

Důkaz:

1. $\Rightarrow$ 2. Podle definice má f na $U_{0,R}(a)$ Laurentovu řadu $\sum\limits_{0}^{\infty}c_n(z-a)^n$. Evidentně $c_0=\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Zřejmé.

3. $\Rightarrow$ 1. Dokážeme o záporně indexovaných koeficientech Laurentovy řady, že jsou v absolutní hodnotě menší než libovolné kladné číslo. Použijeme k tomu jejich integrálního vyjádření:

$$|c_n|=\left|\int_{K_r(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}\right|\leq 2\pi r\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^{-|n|+1}}\max_{z\in U_{0,R}(a)}|f(z)|=r^{|n|}\max_{z\in U_{0,R}(a)}|f(z)|\searrow 0.$$

Připomeňme, že n je záporné, tedy $n=-|n|$.

Označení: Označme $\mathcal{A}_N$ funkce, jež lze psát jako $(z-a)^Ng(z)$, kde g je holomorfní a různá od nuly v a. V doplňku množiny $\bigcup\mathcal{A}_N$ je pouze funkce identicky nulová a funkce s podstatnými singularitami (samozřejmě z funkcí s izolovanou singularitou).

Věta 31: O funkcích majících kořen
Funkce f má v bodě a kořen násobnosti n, právě když $\exists g \in H\bigl(U(a)\bigr)$, $g(a) \neq 0$ taková, že $f(z) = g(z)(z-a)^n$.

Důkaz: Je triviální — funkce f a g zapište pomocí Taylorových řad a pak konfrontujte s definicí funkce s n-násobným kořenem a větou (27).

Lemma:
Nechť funkce f má v bodě a kořen násobnosti n, funkce g v témže bodě kořen násobnosti m a funkce h kořen násobnosti l v bodě 0. Pak

1. pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ má funkce $\alpha f + \beta g$ v bodě a kořen násobnosti alespoň $\min\{n, m\}$;
2. pro $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ má funkce $\alpha f \cdot g$ v a kořen násobnosti $m + n$;
3. pro $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ má funkce $\alpha f / g$ v témže bodě při $n > m$ kořen násobnosti $n - m$ a pro $n = m$ má v bodě a nenulovou limitu;
4. funkce $f \circ g : z \mapsto h\bigl(g(z)\bigr)$ má v a kořen násobnosti $m \cdot l$.

Důkaz: Všechna tvrzení dokážeme rozepsáním funkcí f, g, h do příslušných Taylorových řad, které začínají vždy n-tou (m-tou, l-tou) mocninou, a následným provedením příslušné operace. První dva body ponecháme k důkazu čtenáři, dokážeme jen 3. a 4. bod.

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^k}{\sum_{k=m}^{\infty} d_k (z-a)^k} = (z-a)^{n-m} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n} (z-a)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} d_{k+m} (z-a)^k};$$

pro $n \leq m$ vidíme, že na podíl funkcí je roven $(n-m)$-té mocnině $z - a$ vynásobené holomorfní funkcí. V čitateli i jmenovateli zlomku jsou Taylorovy řady, jejichž součty jsou podle věty (27) holomorfní funkce. Protože tyto řady mají nenulový první člen ($c_n \neq 0$, $d_m \neq 0$), jsou hodnoty těchto funkcí v a různé od nuly a jejich podíl je proto rovněž funkce holomorfní a nenulová v a. Podíl lze proto nazpátek zapsat ve tvaru Taylorovy řady s nenulovým prvním členem. Po vynásobení této řady $(z-a)^{n-m}$ dostaneme řadu odpovídající definici funkce s $(n-m)$-násobným kořenem. Při $n = m$ zbude pouze funkce holomorfní nenulová v a. Případ $n < m$ nám umožní následující věta převést na případ právě probraný: budeme uvažovat funkci g/f, která podle tohoto lemmatu bude mít v a kořen násobnosti $m - n$, a z věty pak zjistíme, že f/g má v a pól násobnosti $m - n$.

Bod 4 dokážeme pomocí již dříve probraného skládání řad.

$$h\bigl(g(z)\bigr) = \sum_{k=l}^{\infty} b_k \left(\sum_{p=m}^{\infty} d_p (z-a)^p \right)^k = \sum_{\substack{k=l \\ p=m}}^{\infty} b_k \bigl(d_p (z-a)^p\bigr)^k = \sum_{\substack{p=m \\ k=l}}^{\infty} b_k d_p^k (z-a)^{kp} = (z-a)^{ml} \sum_{q=0}^{\infty} a_q (z-a)^q.$$

Poslední úprava již není nutná pro pochopení důkazu: již v předposledním výrazu je patrné, že ve vzniklé řadě se budou vyskytovat pouze členy s alespoň ml-tými mocninami $(z-a)$.

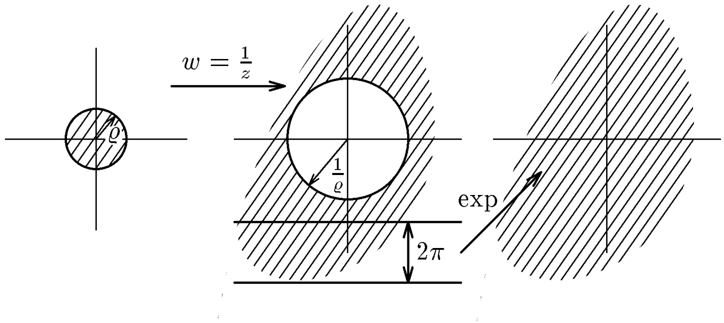
Věta 32: Vztah funkcí s kořeny a póly k holomorfním funkcím
Nechť f má v a izolovanou singularitu. Pak je ekvivalentní

1. f má v a pól násobnosti N,
2. $f \in \mathcal{A}_{-N}$,
3. $1/f$ má v a kořen násobnosti N,
4. $1/f \in \mathcal{A}_N$.

Důkaz: Ekvivalence 1 a 2 se snadno dokáže vytknutím faktoru $(z-a)^{-N}$ z Laurentovy řady funkce f, analogicky ekvivalence 3 a 4. K ověření ekvivalence 2 a 4 stačí si uvědomit, že převrácená hodnota funkce holomorfní a různé od nuly je funkce holomorfní a různá od nuly.

Věta 33: Charakterizace izolovaných singularit pomocí limity
nechť f má v a izolovanou singularitu

1. Jsou ekvivalentní tvrzení (a) f má pól v a, (b) $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.
2. Je ekvivalentní
   (a) f má v a podstatnou singularitu,



Obrázek 11: K důkazu Picardovy věty pro $f(z) = e^{1/z}$ — konstrukce obrazu $f\big(U_\varepsilon(0)\big)$

(b) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ neexistuje,

(c) $(\forall\rho > 0)$ je $f\big(U_{0,\rho}(a)\big)$ hustá v $\mathbb{C}$ (Casorati-Weierstrass).

Důkaz:
1(a) $\Rightarrow$ 1(b) Má-li f v a pól násobnosti N, lze ji vyjádřit ve tvaru $(z-a)^{-N}g(z)$, kde g je funkce holomorfní a různá od nuly, a tedy $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.
2(a) $\Rightarrow$ 2(c) Obměnou. Nechť $f\big(U_{0,\rho}(a)\big)$ není pro nějaké ρ hustá v $\mathbb{C}$, tedy existuje bod α a jeho okolí $U_r(\alpha)$ disjunktní s $U_{0,\rho}(a)$. Jinými slovy $|f(z) - \alpha| \geq r$ pro všechna $z \in U_{0,\rho}(a)$. Definujme funkci $g(z) = 1/\big(f(z) - \alpha\big)$. Tato funkce je omezená ($\leq 1/r$) v $U_{0,\rho}(a)$, má tedy podle Riemannovy věty v a limitu, kterou ji můžeme dodefinovat. Po dodefinování je g holomorfní a její převrácená hodnota je buď též holomorfní nebo má v a pól, tedy ne podstatnou singularitu, což jsme měli dokázat.
2(c) $\Rightarrow$ 2(b) Je-li $f\big(U_{0,\rho}(a)\big)$ hustá v $\mathbb{C}$, pak $\forall\alpha \in \mathbb{C}$ existuje posloupnost $z_n \to a$, pro niž $f(z_n) \to \alpha$, limita tedy dle Heineho věty neexistuje.
2(b) $\Rightarrow$ 2(a) Pokud by f měla v a pól či odstranitelnou singularitu, pak by limita existovala, čili pokud neexistuje, může být v a pouze podstatná singularita.
1(b) $\Rightarrow$ 1(a) Pokud by f měla v a odstranitelnou nebo podstatnou singularitu, pak by byla limita konečná nebo by neexistovala, čili pokud je nekonečná, zbývá jedině pól.

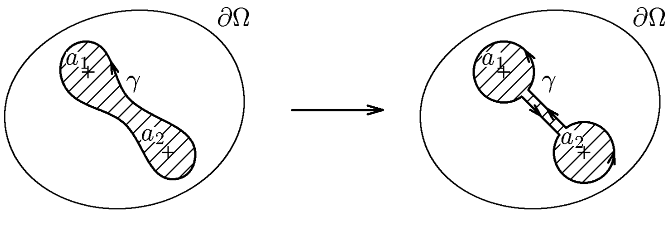
P o z n á m k a : Casorati–Weierstrassovu větu lze ještě zesílit — v libovolném okolí podstatné singularity nabývá funkce všech hodnot z $\mathbb{C}$ vyjma nejvýše jedné. Toto tvrzení je obsahem tzv. Picardovy věty.

P o z n á m k a : Máme tedy ekvivalentní charakterizaci jednotlivých typů singularit — v odstranitelné singularitě je konečná limita, v pólu nekonečná a v podstatné singularitě limita neexistuje.

P ř í k l a d : Příkladem funkce s podstatnou singularitou je $e^{1/z}$ v nule. Vidíme to z rozvoje této funkce do Laurentovy řady, který je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{1}{z})^n$, i z Casorati–Weierstrassovy resp. Picardovy věty. Převrácená hodnota totiž zobrazuje libovolné okolí nuly $U_\rho(0)$ na $\mathbb{C} \setminus \overline{U_{1/\rho}(0)}$. Exponenciála ovšem zobrazuje každý pás $\mathbb{R} \times (\varphi, \varphi + 2\pi\rangle$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ — viz obrázek 11. Stačí nyní položit např. $\varphi = 1/\rho$ a vidíme, že tvrzení Picardovy věty je splněno a že ji navíc nelze zesílit (bod 0 nebude obrazem žádného z).

Definice 21: Meromorfní funkce
Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otevřená. Pak f je *meromorfní* právě když existuje množina $A \subset \Omega$ sestávající pouze z izolovaných bodů taková, že f je holomorfní na $\Omega \setminus A$ a v bodech A nemá podstatné singularity.

P ř í k l a d : Typickými meromorfními funkcemi jsou racionální funkce. Rozložíme-li jejich předpis na parciální zlomky, vidíme, že množina pólů je konečná, a tudíž má samozřejmě pouze izolované body. Existují však i meromorfní funkce s nekonečnou množinou pólů, například $1/\sin z$, která má póly v bodech $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Ověřte sami, že $\sin z$ má kořeny pouze na reálné ose. Návod: hledejte kořeny $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$.



Obrázek 12: Transformace integrační křivky v případě, že obsahuje dva póly

§12. Reziduová věta: definice rezidua, výpočty reziduí

Definice 22: Reziduum
Nechť f má izolovanou singularitu v $a \in \mathbb{C}$. Koeficient c_{-1} v Laurentově řadě

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in U_{0,r}$$

nazveme *reziduem* funkce f v bodě a a značíme jej $\operatorname{res}_a f$.

Uvažujme holomorfní funkci f, která má v bodě a izolovanou singularitu. Podle věty (29) pak existuje okolí $U_{0,r}(a)$, na němž lze funkci f zapsat pomocí Laurentovy řady. Tuto řadu lze zapsat jako součet dvou obyčejných mocninných řad: jedné pro nezáporná n a druhé pro záporná n. O takových řadách již víme, že pokud konvergují v nějakém bodě z_0, pak konvergují *stejnoměrně* na libovolném kruhu uvnitř kružnice se středem v a a procházející bodem z_0. Pak ovšem lze zaměnit pořadí sumy a integrálu a můžeme snadno spočítat integrál z f po libovolné kladně orientované kružnici K_ϱ uvnitř $U_r(a)$. Využijeme výsledku příkladu na za Cauchyho větou (24).

$$\int_{K_\varrho} f(z) \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{K_\varrho} (z-a)^n \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = c_{-1}.$$

Ve zmíněném příkladu jsme totiž ukázali, že všechny integrály v sumě budou nulové, kromě případu $n = -1$, kdy vyjde jednička.

Dále víme, že hodnota integrálu se nemění při změnách tvaru integrační křivky, pokud při transformaci nepřecházíme singularity[26] funkce. Tento jednoduchý postup nám tedy umožní snadno počítat integrály přes libovolnou neprotínající se křivku γ tak, že ji „zdeformujeme“ do kružnice se středem v singularitě.

Pokud by snad uvnitř křivky bylo singularit více, ale konečně mnoho, upravíme křivku podle obrázku (12). Integrály přes úsečky v opačných směrech se odečtou a integrály přes „skoro celé“ kružnice vypočítáme podle výšeuvedeného způsobu. Integrál přes celou křivku γ bude roven $2\pi i$ násobku součtu reziduí f ve všech bodech uvnitř γ, v nichž má f pól. Toto tvrzení zopakujeme ve velmi důležité větě:

Věta 34: reziduová
Nechť $f \in H(\Omega \setminus A)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a A konečná množina. Dále nechť O je oblast s po částech hladkou hranicí, $\overline{O} \subset \Omega$ a budiž $A \cap \partial O = \emptyset$. Pokud je ∂O kladně orientovaná, pak

$$\int_{\partial O} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a \in A \cap O} \operatorname{res}_a f. \tag{26}$$

Poznámka: Znovu připomeňme, že pokud uvažujeme kruh v komplexní rovině, je kladná orientace její hranice *proti směru hodinových ručiček*. Pokud bychom naopak brali doplněk takového kruhu, byla by kladná orientace jeho hranice ve směru hodinových ručiček.

Tato konvence plyne z úvah o vnější normále. Označíme y tečný vektor k hranici a x vnější normálu plochy v komplexní rovině. Hranice je pak orientována kladně, pokud $\{x, y\}$ je kladně orientovaná báze[27].

[26] Body, v nichž funkce není holomorfní.
[27] Kanonické vektory e_1, e_2 udávající orientaci roviny jsou standardní — e_1 zleva doprava, e_2 zdola nahoru.

Důkaz: Protože A je konečná, jistě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že všechny kruhy $\overline{U_\varepsilon(a)}$ pro $a \in A$ jsou navzájem disjunktní a leží uvnitř O. Označíme

$$O' = O \setminus \Big\{ \bigcup_{a\in A} \overline{U_\varepsilon(a)} \Big\}, \text{ a tedy } \partial O' = \partial O \; - \sum_{a\in A\cap O} \partial U_\varepsilon(a).$$

Předpokládáme, že hranice kruhů $U_\varepsilon(a)$ jsou orientovány pomocí vnějších normál; vzhledem k množině O' jsou to ale vnitřní normály, příslušné kružnice jsou tím pádem orientovány záporně a integrály je nutno brát s minusem. Uvnitř O' je funkce f již holomorfní, a protože je O' oblast[28], je podle Cauchyho věty (24)

$$0 = \int_{\partial O'} f = \int_{\partial O} f - \sum_{a\in A\cap O} \int_{K_\varepsilon(a)} f \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\partial O} f = \sum_{a\in A\cap O} \int_{K_\varepsilon(a)} f.$$

Uvnitř každého $U_\varepsilon(a)$ je ale funkce f holomorfní s výjimkou bodu a, a tedy lze zopakovat výpočet na začátku paragrafu — integrál je vždy roven[29] $2\pi i \operatorname{res}_a f$.

Příklad: Spočítejme integrál funkce

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2}$$

přes kladně orientovanou křivku neprocházející body $-1, 1$, uvnitř které (a) je pouze bod -1, (b) jsou oba body $-1, 1$.

Použijeme reziduovou větu, bude tedy zapotřebí nejprve vypočítat rezidua f v pólech 1, -1; všude jinde je f zřejmě holomorfní. Sestrojíme Laurentovy řady f v těchto středech.

Víme, že funkce $g(z) = z^2/(z+1)^2$ je v $z = 1$ holomorfní, a tedy podle věty (27) zapsatelná pomocí Taylorovy řady se středem v $a = 1$. První člen této řady je roven $g(a) = 1/4$. Tím pádem

$$\frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-1)^n = \frac{1}{z-1} \left(\frac{1}{4} + b_1(z-1) + b_2(z-1)^2 + \cdots \right) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + b_1 + b_2(z-1) + \cdots,$$

z čehož je patrné, že $c_{-1} = \operatorname{res}_1 f = 1/4$. Zároveň také vidíme, že pól funkce f v bodě $z = 1$ má násobnost 1 — hlavní část Laurentovy řady končí u minus první mocniny.

Při výpočtu rezidua f v bodě -1 postupujeme podobně. Do Taylorovy řady se středem $a = -1$ rozvineme tentokrát $g(z) = z^2/(z-1)$; využijeme ovšem druhý člen rozvoje. Ten má tvar $(z+1) \cdot g'(a)/1! = (z+1) \cdot 3/4$. První člen s hodnotou $g(a) = -1/2$ není pro výpočet rezidua důležitý.

$$\frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z+1)^n = \frac{1}{(z+1)^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(z+1) + d_2(z+1)^2 + \cdots \right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{z+1} + d_2 + \ldots$$

Opět vidíme, že reziduum f v $z = -1$ je rovno $3/4$ a že pól v tomto bodě má násobnost 2.

Vraťme se k původnímu příkladu: pro (a) bude integrál vždy vycházet $2\pi i \frac{1}{4} = \pi i/2$, pro (b) potom $2\pi i(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = 2\pi i$.

Poznámka: V předchozím příkladu jsme viděli způsob, jak určit násobnost pólu funkce f v bodě a. Pokud se f „chová" v a jako $1/(z-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$, má pól násobnost n. Funkce $1/(z-a)^n$ může být navíc násobena libovolnou funkcí $g(z)$, která je v a holomorfní a nenulová. Z funkce f totiž můžeme vytknout $1/(z-a)^n$ a zbylou funkci $g(z)$ rozvinout do Taylorovy řady. Po vynásobení vytknutým výrazem pak dostaneme Laurentovu řadu, která začíná $g(a)/(z-a)^n$, což implikuje příslušný pól. Pokud by snad bylo $g(a) = 0$, pak musíme najít první nenulovou derivaci $g^{(k)}(a)$ a násobnost pólu bude $n-k$; srov. s lemmatem za větou (31) a větou následující.

[28] Otevřená a souvislá množina.

[29] Nyní nepočítáme integrál z $f/(2\pi i)$, ale jen z f.

Konečně pokud singularitu působí jiná funkce než $(z-a)^n$, například $1-\cos(z-a)$, stačí použít Taylorova rozvoje podobně, jako jsme to činili při výpočtu limit. V úvahu pak bereme jen nejnižší mocninu, neboť všechny ostatní mocniny mají vůči ní pro z blízké a hodnoty zanedbatelně malé. V uvedeném příkladě bychom dostali $\frac{1}{2}(z-a)^2+\ldots$, funkce $1/\bigl(1-\cos(z-a)\bigr)$ má proto v $z=a$ pól násobnosti 2. Zatímco

$$\frac{\sin z}{1-\cos z}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\ldots}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots}=\frac{1+o(z^2)}{z/2+o(z^3)}$$

má v $z=0$ pól násobnosti 1.

P ř í k l a d : Vypočtěme hlavní část Laurentovy řady funkce

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)\sin z^3}$$

v bodě (a) $z=0$, (b) $z=-1$ a určeme rezidua. V bodě $z=\sqrt[3]{\pi}$ určeme násobnost pólu.

Předně zapišme funkci $\sin z^3$ pomocí Taylorovy řady se středem v $a=0$:

$$\sin z^3=z^3-\frac{\left(z^3\right)^3}{3!}+\frac{\left(z^3\right)^5}{5!}-\ldots=z^3+o(z^9). \tag{27}$$

Funkce $1/(z+1)$ je v $z=0$ holomorfní, budeme se tedy zatím zajímat pouze o $g(z)=z/\sin z^3$. Postupem naznačeným v předchozí poznámce určíme, že pól g v $z=0$ bude mít násobnost 2 — funkce $\sin z^3$ má v nule kořen násobnosti 3 dle lemmatu za větou (31), neboť z^3 má kořen násobnosti 3 a $\sin z$ má kořen násobnosti 1. Ověřme, že funkce $z^2g(z)$ bude v $z=0$ spojitá. Hodnotu v $z=0$ budeme muset dodefinovat limitou:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{\sin z^3}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y-y^3/6+\ldots}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{1-o(y^2)}=1.$$

Tuto limitu jsme již počítali na reálné ose, výpočet jsme nyní provedli způsobem, který obstojí i v komplexní rovině. V tomto případě ale využíváme pouze skutečnosti, že limita existuje, je konečná a nenulová.

O funkci $F(z)=z^2f(z)$ tedy víme, že je v $z=0$ po dodefinování $f(0)$ limitou spojitá a podle bodu 2 věty (30) dokonce holomorfní; budeme počítat první dva členy Taylorovy řady F v $z=0$. Její derivaci v $z=0$ pak stačí spočítat pro $z\in\mathbb{R}$, a to například jako limitu derivací[30] při $z\to 0$

$$F'(0)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^3}{(z+1)\sin z^3}\right]'=-1.$$

Výpočet této limity je poněkud zdlouhavý, po rozderivování je vhodné zapsat funkce $\sin x$ a $\cos x$ pomocí jejich Taylorových řad, a nebudeme jej detailně provádět.

Nyní ale již můžeme psát hlavní část Laurentovy řady

$$f(z)=\frac{1}{z^2}F(z)=\frac{1}{z^2}(1-z+\ldots)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+\ldots$$

Reziduum f v $z=0$ bude rovno -1.

Ukažme ještě alternativní způsob výpočtu Laurentovy řady. Již dříve jsme ukazovali postup, jak násobit a dělit řady. Užijeme (27)

$$(1+z)\sin z^3=z^3+z^4-\frac{z^9}{6}-\frac{z^{10}}{6}+\ldots$$

a dále dělíme polynom polynomem $z:\bigl((z+1)\sin z^3\bigr)$:

$$\begin{array}{l}
\quad z \qquad\qquad\qquad : \left(z^3+z^4-z^9/6-\ldots\right)=z^{-2}-z^{-1}+\ldots \\
\underline{-\,z-z^2+z^7/6+\ \ldots} \\
\quad -\,z^2+z^7/6+\ \ldots \\
\qquad\quad \ldots
\end{array}$$

[30] V prvním semetru jsme užívali tvrzení, že jednostranná derivace v a je rovna limitě oboustranných derivací v $x\to a$; tento postup aplikujeme z obou stran $a=0$.

Hlavní část Laurentovy řady jsme takto dostali podstatně rychleji.

Zaměřme se ještě na (b) a (c). Situace pro $z = -1$ je triviální: $z/\sin z^3$ je v $z = -1$ holomorfní, a tudíž ji stačí zapsat Taylorovou řadou, jejíž první člen bude $1/\sin 1$. Laurentova řada pak bude

$$\frac{z}{(z+1)\sin z^3} = \frac{1}{z+1}\left(\frac{1}{\sin 1} + \dots\right),$$

reziduum rovno $1/\sin 1$.

V bodě $a = \sqrt[3]{\pi}$ je holomorfní a nenulová i funkce $z/(z+1)$ a stačí se zaměřit na $1/\sin z^3$. Podle věty (32) má tato funkce v a pól násobnosti k, právě když má $\sin z^3$ v a kořen stejné násobnosti. Funkce $z^3 - \pi$ má v $z = \sqrt[3]{\pi}$ ovšem kořen násobnosti pouze 1; další dva kořeny jsou $\sqrt[3]{\pi}e^{\pm 2\pi/3}$. Podle lemmatu za větou (31) má tím pádem $\sin z^3$ v a kořen násobnosti pouze 1, neboť kořen $\sin z$ v $z = 0$ je jednonásobný.

Viděli jsme, že výpočet rezidua pomocí konstrukce Laurentovy řady může být poměrně pracný. Naznačený postup ovšem lze shrnout do věty, díky čemuž napříště odpadne dlouhé odvozování.

Věta 35: Výpočet reziduí

1. Pokud $f \in H\big(U(a)\big)$, pak $\operatorname{res}_a f = 0$.
2. Je-li $f, g \in H\big(U(a)\big)$ a g má v a jednonásobný kořen, pak
$$\operatorname{res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$
3. Nechť $f \in H\big(U(a)\big)$ a nechť g má v a jednonásobný pól. Pak $\operatorname{res}_a f(z)g(z) = f(a)\operatorname{res}_a g(z)$.
4. Nechť f má v a pól násobnosti nejvýše n. Pak
$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\big[(z-a)^n f(z)\big]^{(n-1)}.$$

Důkaz:

1. Holomorfní funkci lze dle věty (27) zapsat pomocí Taylorovy řady, tedy $c_{-1} = 0$.
2. Podle věty (31) je $g(z) = (z-a)\widetilde{g}(z)$, kde $\widetilde{g} \in H\big(U(a)\big)$, $\widetilde{g}(a) \neq 0$. Potom je ale funkce $f(z)/\widetilde{g}(z)$ holomorfní, a tedy
$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{f(z)}{\widetilde{g}(z)} = \frac{1}{z-a}\big(c_0 + c_1(z-a) + \dots\big) = \frac{c_0}{z-a} + c_1 + \dots,$$
kde $\operatorname{res}_a f(z)/g(z) = c_0 = f(a)/\widetilde{g}(a)$ je první člen Taylorovy řady funkce $f(z)/\widetilde{g}(z)$. Vypočítáme číslo $\widetilde{g}(a)$
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(z-a)^n = (z-a)\sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1}(z-a)^n = (z-a)\widetilde{g}(z),$$
vidíme, že $\widetilde{g}(a) = d_1$, a to je v Taylorově řadě funkce g rovno $g'(a)$.
3. Obě funkce zapíšeme pomocí řad
$$g(z) = \frac{\operatorname{res}_a g}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n, \text{ kde } d_0 = f(a).$$
Násobením pak dostáváme
$$f(z)g(z) = f(a)\frac{\operatorname{res}_a g}{z-a} + h(z),$$
kde $h(z)$ obsahuje už pouze nezáporné mocniny $z - a$.

4. Zobecněním postupu v bodě 2. Má-li f v a pól násobnosti nejvýše n, pak

$$\begin{aligned} f(z) =& c_{-n}(z-a)^{-n} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + h(z), \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \\ (z-a)^n f(z) =& c_{-n} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n h(z), \\ \big[(z-a)^n f(z)\big]^{(n-1)} =& (n-1)!c_{-1} + (z-a)\widetilde{h}(z), \qquad \widetilde{h} \in H\big(U(a)\big) \\ \lim_{z\to a} \big[(z-a)^n f(z)\big]^{(n-1)} =& (n-1)!c_{-1}. \end{aligned}$$

Funkce h i $\widetilde{h}$ jsou totiž lineární kombinace nezáporných mocnin $z-a$.

Příklad: Vypočítejme rezidua funkce

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2}$$

v bodech 1 a -1.

V prvním případě použijeme bodu 2 předchozí věty, neboť F má v $z=1$ zřejmě jednonásobný pól. Volíme $f(z) = z^2/(z+1)^2$, $g(z) = z-1$ a přímo určíme

$$\operatorname{res}_1 \frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{z^2}{(z+1)^2}\bigg|_{z=1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}.$$

Naproti tomu v $z=-1$ má F pól dvojnásobný, a proto je zapotřebí použít bod 4.

$$\operatorname{res}_{-1} \frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\left[(z+1)^2\frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2}\right]' = \frac{z^2-2z}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{3}{4}.$$

Závěrem předvedeme výpočet rezidua v bodě, kde má funkce podstatnou singularitu.

Příklad: Vypočtěme $\operatorname{res}_0 e^{z+1/z}$.

Skutečnost, že funkce $f(z) = e^{z+1/z}$ má v $z=0$ podstatnou singularitu, poznáme například z věty (33). Víme, že e^z má v nule limitu 1 a $e^{1/z}$ limitu nemá (použijeme opět tuto větu a příklad po ní následující).

Věta (35) se o funkcích s podstatnými singularitami nezmiňuje, a nelze ji proto použít. Můžeme se ale pokusit zkonstruovat Laurentovu řadu pomocí známých Taylorových řad.

$$e^z \cdot e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^m\frac{1}{m!} = \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}\frac{z^{n-m}}{n!m!}.$$

Řady můžeme přeuspořádavat, neboť obě Taylorovy řady konvergují stejnoměrně na $U_{\varepsilon,R}(0)$ pro libovolná $\varepsilon, R > 0$. Zajímáme se o koeficient c_{-1} u mocniny z^{-1}. Položíme $n-m=-1$, tj. $m=n+1$ a provedeme zbylou sumaci

$$c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Tato řada zřejmě konverguje a můžeme ji považovat za výsledek. Vidíme, že například neplatí $\operatorname{res}_0 e^{z+1/z} = e^0 \operatorname{res}_0 e^{1/z} = 1$; poslední reziduum vypočítáme například pomocí příkladu za větou (33).

§13. Výpočty integrálů pomocí reziduové věty

Příklad: Určeme

$$\int_{\partial O}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}, \text{ kde } O = \big\{z = x+iy \big|\ x^2+y^2 \le 2x\big\}$$

a ∂O je kladně orientovaná.

Množina O je kruh o středu v bodě $z = 1$ a poloměru 1. O polynomu ve jmenovateli víme, že má celkem čtyři kořeny

$$z_k = \exp\left(i\pi\frac{1+2k}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3, \text{ tedy } z_k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Snadno se lze přesvědčit, že uvnitř O leží pouze kořeny z_0 a z_3. Použijeme reziduovou větu, a protože póly jsou jednonásobné bude k výpočtu stačit bod 2 věty (35).

$$\int_{\partial O} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_0}\frac{1}{z^4+1} + \operatorname{res}_{z_3}\frac{1}{z^4+1}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_0} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_3}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(e^{-3i\pi/4} + e^{3i\pi/4}\right) = \frac{\pi i}{2} 2\operatorname{Re}\left(e^{3i\pi/4}\right) = -\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}.$$

Kořen z_3 jsme zapsali ve tvaru $\exp(-i\pi/4) = \exp(7i\pi/4)$.

Pomocí reziduové věty můžeme počítat integrály i přes neuzavřené křivky. Během výpočtu je ovšem třeba křivku uzavřít, k čemuž se často používá oblouk nebo speciálně půlkružnice. Tím se ve výpočtu vyskytne další integrál; v některých případech se nám jej ale může podařit vynulovat.

Lemma Jordanovo:

1. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ uvažujme funkci f spojitou na množině $A = \{z = \varrho e^{it} \mid \varrho > R, t \in \langle\alpha;\beta\rangle\}$, kde R je nějaké kladné reálné číslo. Označme

$$M_\varrho \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max_{\varphi_\varrho} |f(z)|, \qquad \varphi_\varrho = \{z = \varrho e^{it} \mid t \in \langle\alpha;\beta\rangle\}.$$

Pokud $\varrho M_\varrho \to 0$ při $\varrho \to \infty$, pak platí

$$\int_{\varphi_\varrho} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{při} \qquad \varrho \to \infty. \tag{28}$$

2. Berme $\langle\alpha;\beta\rangle = \langle 0;\pi\rangle$. Pokud $M_\varrho \to 0$ při $\varrho \to \infty$, pak s libovolným $\gamma > 0$

$$\int_{\varphi_\varrho} e^{i\gamma z} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{pro} \qquad \varrho \to \infty. \tag{29}$$

Poznámka: V obou případech mluvíme o chování integrálu z f po části kružnice, pokud její poloměr ϱ roste nade všechny meze. Funkci na celém oblouku charakterizujeme vždy jedním číslem, a to maximem její absolutní hodnoty M_ϱ. První tvrzení říká, že pokud f klesá v nekonečnu natolik rychle, že i po vynásobení délkou oblouku úměrnou ϱ bude stále konvergovat k nule, pak i celý integrál konverguje k nule.

Druhé tvrzení je silnější: stačí nám, aby se k nule blížilo pouze samotné M_ϱ. Neintegrujeme pak ale funkci f samotnou. Toto tvrzení využijeme samozřejmě v některých následujících příkladech.

Důkaz lemmatu: V prvním případě triviálně omezíme celý integrál. Naznačeným způsobem integrál převedeme do prostoru parametru t, poté funkci f na oblouku odhadneme jejím maximem.

$$\left|\int_{\varphi_\varrho} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\alpha^\beta f\left(\varrho e^{it}\right) i\varrho e^{it}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_\alpha^\beta M_\varrho |i\varrho e^{it}|\,\mathrm{d}t = M_\varrho \int_\alpha^\beta \varrho\,\mathrm{d}t = \varrho M_\varrho(\beta-\alpha) \to 0$$

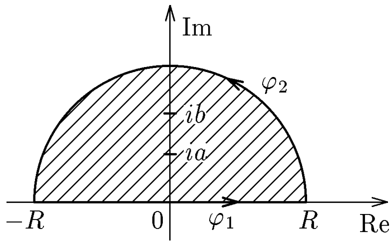
podle předpokladu. Využíváme skutečnosti, že $|e^{ix}| = 1$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Při důkazu druhého tvrzení použijeme podobný postup, číslo z v $e^{i\gamma z}$ zapíšeme pomocí t v goniometrickém tvaru.

$$\left|\int_{\varphi_\varrho} e^{i\gamma z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi e^{i\gamma\varrho(\cos t + i\sin t)} f\left(\varrho e^{it}\right) i\varrho e^{it}\,\mathrm{d}t\right| \le \varrho M_\varrho \int_0^\pi e^{-\gamma\varrho\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Ve zbylých členech bylo v exponentu ryze imaginární číslo, a v absolutní hodnotě jsou tedy rovny jedné.

Poslední integrál není analyticky vyčíslitelný, nám však stačí jen jeho horní odhad. Na $\langle 0;\pi/2\rangle$ je $\sin t \ge t/(\pi/2)$, a proto



Obrázek 13: Integrační křivka pro výpočet integrálů vhodných funkcí přes $\mathbb{R}$.

$$\int_0^{\pi} e^{-\gamma\varrho\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\varrho\sin t}\,\mathrm{d}t \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\gamma\varrho t/\pi}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{\gamma\varrho}\Big[e^{-\gamma\varrho}-1\Big] \le \frac{\text{konst.}}{\varrho}.$$

V závěru jsme ovšem potřebovali, aby $\gamma > 0$: jen tehdy má totiž pro $\varrho \to \infty$ výraz $e^{-\gamma\varrho}$ omezené hodnoty.

Kombinací obou dvou odhadu zjišťujeme, že původní integrál je pro libovolné $\varrho > R$ v absolutní hodnotě menší než konstanta násobená M_ϱ, čímž vidíme, že skutečně v $\varrho \to \infty$ konverguje k nule.

Lemma o obcházení pólů násobnosti jedna:
Nechť f je meromorfní s jednonásobným pólem v $a \in \mathbb{C}$. Pro zadaná $\varrho > 0$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ definujme křivku $\varphi_\varrho(t) = a + \varrho e^{it}$ při $t \in \langle\alpha;\beta\rangle$. Platí

$$\lim_{\varrho\to 0+} \int_{\varphi_\varrho} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\beta-\alpha)\,\mathrm{res}_a\, f.$$

Důkaz lemmatu: Označíme $A = \mathrm{res}_a\, f$. Funkci f pak můžeme zapsat pomocí Laurentovy řady

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + g(z), \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Oba dva sčítance budeme integrovat zvlášť. U prvního dostaneme stejným postupem jako v příkladu za větou (24):

$$\int_{\varphi_\varrho} \frac{A}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \frac{A}{\varrho e^{it}} i\varrho e^{it}\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)Ai.$$

Druhý sčítanec pak omezíme pomocí věty (21) výrazem $K(\beta-\alpha)\varrho$, v němž K značí maximum $|g(z)|$ na nějakém okolí bodu a. Funkce g je totiž v a holomorfní, a tudíž spojitá a omezená. V limitě $\varrho \to 0^+$ pak integrál z $g(z)$ vymizí a dostáváme žádané tvrzení.

Poznámka: Nelze formulovat analogické tvrzení pro obcházení pólů vyšších násobností, integrály v takových případech divergují.

Jordanovo lemma užijeme mimo jiné při výpočtu integrálů na intervalu $(-\infty;\infty)$. Pro funkci f klesající rychle v nekonečnu ($\varrho M_\varrho \to 0$), která je meromorfní v horní polorovině a nemá póly na reálné ose, můžeme tento integrál vypočítat z reziduové věty.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, a>0} \mathrm{res}_a\, f.$$

Nyní tedy ukážeme několik typů integrálů přes $\mathbb{R}$, jejichž výpočet nám usnadní reziduová věta.

I. Integály z funkcí, které v nekonečnu klesají rychleji než $1/r$.

Příklad: Vypočítejme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, \quad a,b>0.$$

Integrovanou funkci označíme $f(z)$. Za křivku integrace volme hranici půlkruhu $\gamma = \varphi_1 + \varphi_2$, kde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \quad t, \quad t \in \langle -R; R\rangle \\ \varphi_2(t) &= Re^{it}, \quad t \in \langle 0; \pi\rangle, \end{aligned}$$

viz obrázek (13). Poloměr R volíme větší než obě čísla a, b, takže γ obsahuje oba póly $z = ia$, $z = ib$. K integrálu přes $(-\infty;\infty)$ dospějeme v limitním případě $R \to \infty$. Podle Jordanova lemmatu pak bude integrál přes φ_2 konvergovat k nule, neboť

$$M_\varrho = \max_{|z|=\varrho} \left| \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \right| \le \max_{|z|=\varrho} \frac{1}{(|z^2|-|a^2|)(|z^2|-|b^2|)} \le \frac{1}{\varrho^4} \max_{|z|=\varrho} \frac{1}{(1-\frac{|a^2|}{|z^2|})(1-\frac{|b^2|}{|z^2|})},$$

a tedy ϱM_ϱ konverguje v nekonečnu k nule — poslední maximum je zřejmě při $\varrho \to \infty$ omezené[31]. Na druhou stranu ovšem bude

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \big(\mathrm{res}_{ia} f + \mathrm{res}_{ib} f\big).$$

Rezidua spočítáme pomocí věty (35). Pokud je $a \ne b$, jsou póly jednonásobné a platí

$$\mathrm{res}_{ia} f(z) = \frac{1}{z^2+b^2}\bigg|_{z=ia} \mathrm{res}_{ia} \frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{b^2-a^2} \cdot \frac{1}{2z}\bigg|_{z=ia} = \frac{1}{2ai(b^2-a^2)},$$

$$\text{a podobně } \mathrm{res}_{ib} f(z) = \frac{1}{2bi(a^2-b^2)}.$$

Podle reziduové věty potom bude při $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z) = 2\pi i \left(\frac{1}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{1}{2bi(a^2-b^2)} \right) = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Pokud by bylo $a = b$, museli bychom pro výpočet rezidua použít bod 4 věty (35). Druhá možnost je použít úvahu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{b\to a} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \lim_{b\to a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \lim_{b\to a} \frac{\pi}{ab(a+b)} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Zaměnit pořadí integrálu a limity jsme ovšem mohli pouze proto, že funkce $f(z)$ má pro $a, b > 0$ integrabilní majorantu. Při zkoumání uvedené limity volíme například $c = a/2$, a pak je pro $b > c$

$$\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \le \frac{1}{(z^2+c^2)^2}.$$

Příklad: Pro $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ spočítejme integrál I z následující funkce $f(z)$:

$$I = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{z^n+1}\,\mathrm{d}z.$$

Za křivku, přes níž budeme integrovat, můžeme opět zvolit hranici půlkruhu; nevýhoda tohoto postupu je, že uvnitř takové křivky leží mnoho pólů (zhruba $n/2$) a navíc pro n lichá bude jeden z pólů ležet na reálné ose v bodě -1. Zvolíme proto vhodněji hranici kruhové výseče omezené kladnou reálnou osou a polopřímkou, která s ní svírá úhel $2\pi/n$. Hranici popíšeme následovně

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = t,\ t \in \langle 0; R\rangle, && \varphi_2(t) = Re^{it},\ t \in \langle 0; 2\pi/n\rangle, \\ &\varphi_3(t) = te^{2\pi i/n},\ t \in \langle 0; R\rangle, && \gamma = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3. \end{aligned}$$

Integrál přes φ_2 konverguje v $R \to \infty$ k nule, neboť exponent u z ve jmenovateli je alespoň o dvě větší než exponent u z v čitateli, a tedy i po násobení R bude $R \cdot M_R \to 0$ při $R \to \infty$, pročež lze použít první část Jordanova lemmatu. Integrál přes φ_3 vypočítáme

[31]Jiná možnost je používat trojúhelníkovou nerovnost, např. $|a-b| \ge |a| - |b|$.

$$\int_{\varphi_3} \frac{z^{m-1}}{z^n+1}\,\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{t^{m-1}e^{2\pi i\frac{m-1}{n}}}{t^n e^{2\pi i}+1} e^{2\pi i/n}\,\mathrm{d}t = e^{2\pi i m/n}\int_0^R \frac{t^{m-1}}{t^n+1}\,\mathrm{d}t = e^{2\pi i m/n} I_R.$$

V posledním kroku jsme označili I_R integrál, jehož limitou $R \to \infty$ nalezneme I. Uvnitř γ leží zřejmě právě jeden pól, a to v bodě $z_1 = e^{i\pi/n}$. Vypočteme reziduum v tomto bodě

$$\operatorname{res}_{z_1} \frac{z^{m-1}}{z^n+1} = z^{m-1}\big|_{z=z_1} \operatorname{res}_{z_1} \frac{1}{z^n+1} = e^{i\pi(m-1)/n} \frac{1}{nz^{n-1}}\bigg|_{z=z_1} = \frac{e^{i\pi(m-n)/n}}{n} = -\frac{e^{i\pi m/n}}{n}.$$

Celkem tedy podle reziduové věty při $R \to \infty$:

$$-2\pi i \frac{e^{i\pi m/n}}{n} = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\varphi_1} f - \int_{\varphi_3} f\right) = I - e^{2\pi i m/n} I \qquad \text{po úpravě} \qquad I = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin \pi m/n}.$$

II. Integrály součinu harmonické funkce s funkcí klesající jako $1/r^n$, $n \in (0;1\rangle$.

P ř í k l a d: Pro zadané reálné konstanty $a, b > 0$ spočtěme

$$\int_0^\infty \frac{z \sin az}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z.$$

Integrovaná funkce $f(z)$ je sudá, a proto ji můžeme integrovat přes celé $\mathbb{R}$, čímž dostaneme dvojnásobek integrálu přes $(0;\infty)$. Použijeme stejnou integrační křivku $\gamma = \varphi_1 + \varphi_2$ jako v předminulém případě. Zřejmě nemůžeme použít první část Jordanova lemmatu, neboť funkce $z^2 \sin az/(z^2+b^2)$ nemá v nekonečnu limitu. Abychom mohli použít druhé části lemmatu, musíme provést trik

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{z \sin az}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^\infty \operatorname{Im} \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z.$$

Pro funkci $z/(z^2+b^2)$ se nám podaří ukázat $M_\varrho \to 0$, neboť pro $\varrho > \sqrt{2}b$

$$\max_{|z|=\varrho}\left|\frac{z}{z^2+b^2}\right| \le \max_{|z|=\varrho} \frac{\varrho}{|z^2|-|b^2|} \le \frac{\varrho}{\varrho^2/2} = \frac{2}{\varrho}.$$

Používáme trojúhelníkové nerovnosti ve tvaru $|a-b| \ge \big||a|-|b|\big|$. Integrál přes křivku φ_2 tedy bude klesat k nule při $R \to \infty$. Dále je zapotřebí spočítat rezidua: funkce f má v horní polorovině jediný pól, a to v bodě ib. Jeho násobnost je 1, a výpočet je jednoduchý:

$$\operatorname{res}_{ib} \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2} = ze^{iaz}\big|_{z=ib} \operatorname{res}_{ib} \frac{1}{z^2+b^2} = ibe^{-ab}\cdot \frac{1}{2z}\bigg|_{z=ib} = \frac{1}{2}e^{-ab}.$$

Celkem podle reziduové věty bude

$$\int_0^\infty \frac{z \sin az}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{z \sin az}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_\gamma \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\operatorname{Im} 2\pi i \frac{e^{-ab}}{2} = \frac{\pi}{2}e^{-ab}.$$

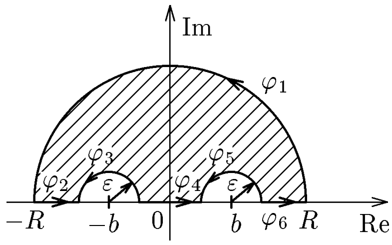
Připomeňme ještě znovu, že Jordanovo lemma sice vyžaduje, aby $a > 0$, ale v opačném případě si stačí uvědomit, že $\sin ax = -\sin(-ax)$ a že minus lze vytknout před integrál.

Konečně dodejme, že stejný trik *nelze* použít pro kosinus na místě sinu. Funkce f by pak byla lichá a integrál přes $\mathbb{R}$ vychází nula — a to jsme také spočítali (stačí brát místo imaginárních částí reálné části).

C v i č e n í: Proveďte integraci klasickým způsobem — rozložte funkci na parciální zlomky, najděte primitivní funkci a porovnejte výsledky.

P ř í k l a d: Pro $a, b > 0$ integrujme

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{z \sin az}{z^2-b^2}\,\mathrm{d}z.$$



Obrázek 14: Integrační křivka pro funkci s póly v $\pm b$.

Integrál $f(z)$ v Lebesgueově smyslu neexistuje[32]. Můžeme mluvit pouze o *hlavní hodnotě* (v.p. [33]) definované v tomto případě

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f \stackrel{\text{df}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int_{-\infty}^{-b-\varepsilon} f + \int_{-b+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^{\infty} f \right]. \tag{30}$$

Za integrační křivku volíme opět hranici půlkruhu γ s tím, že musíme „obejít" oba póly $\pm b$ — viz obrázek (14). Parametrizace dílčích křivek budou

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = Re^{it},\ t \in \langle 0; \pi \rangle, && \varphi_2(t) = t,\ t \in \langle -R; -b-\varepsilon \rangle, \\ &\varphi_3(t) = -b + \varepsilon e^{it},\ t \in \langle 0; \pi \rangle, && \varphi_4(t) = t,\ t \in \langle -b+\varepsilon; b-\varepsilon \rangle, \\ &\varphi_5(t) = b + \varepsilon e^{it},\ t \in \langle 0; \pi \rangle, && \varphi_6(t) = t,\ t \in \langle b+\varepsilon; R \rangle \end{aligned}$$
$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_5 + \varphi_6.$$

Jinak postupujeme stejně jako v předchozím příkladu: přejdeme od sinu k exponenciále a ukážeme, že integrál přes φ_1 bude pro $R \to \infty$ konvergovat k nule. Integrály přes φ_3, φ_5 spočítáme pomocí lemmatu o obcházení pólů násobnosti jedna. Potřebujeme ovšem vypočítat příslušná rezidua

$$\operatorname{res}_b \frac{ze^{iaz}}{z^2 - b^2} = be^{iab} \operatorname{res}_b \frac{1}{z^2 - b^2} = \frac{be^{iab}}{2b} = \frac{1}{2} e^{iab}$$
$$\operatorname{res}_{-b} \frac{ze^{iaz}}{z^2 - b^2} = \frac{1}{2} e^{-iab};$$
$$\pi i \big[\operatorname{res}_b f + \operatorname{res}_{-b} f \big] = \pi i \cos ab.$$

V posledním kroku jsme již vypočítali součet integrálů přes φ_3, φ_5 v limitě $\varepsilon \to 0$.

Uvnitř křivky γ nejsou již žádné póly, a proto platí

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\varphi_2} f - \int_{\varphi_3} f + \int_{\varphi_4} f - \int_{\varphi_5} f + \int_{\varphi_6} f$$
$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iaz}}{z^2 - b^2}\, \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int_{\varphi_3} f + \int_{\varphi_5} f \right] = \pi \cos ab.$$

Stejně jako v předchozím příkladu se nakonec zajímáme pouze o imaginární části integrálů.

Na těchto dvou příkladech si také můžeme snadno znovu ukázat, že při záměně integrace a limity nelze opomíjet nalezení integrabilní majoranty. Zatímco funkce $f(z)$ je pro $a = 0$ identicky rovna nule, hodnota integrálu podle vzorce pro $a, b > 0$ vychází v obou případech π. Skulinou v našem výpočtu pro $a = 0$ je, že vynulovat integrál přes φ_1 se nám podařilo pouze pro $a > 0$.

P o z n á m k a : S integrály typu $f(z)e^{iz}$ se setkáme v následující kapitole o Fourierově transformaci.

[32]Myšlenka Lebesgueova integrálu „sečíst vše nad osou x a odečíst od toho součet všeho pod osou x" zde nefunguje, neboť oba dva součty jsou nekonečné, a v našem pojetí tedy neexistují.

[33]Z fr. valeur principale.

III. Integrály typu $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{|z|=1} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} F(e^{it}) i e^{it}\,\mathrm{d}t.$

Používáme samozřejmě substituci $z = e^{it}$. Převodní vztahy budou

$$\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t, \qquad \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t$$
$$F(z) = f\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{1}{iz}.$$

Příklad: Určeme

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2a\cos t + a^2}, \qquad a \neq 0.$$

Substitucí $z = e^{it}$ podle obvyklých pravidel přejdeme k integrálu po jednotkové kružnici (při kladné orientaci).

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{1 - a\big(z + 1/z\big) + a^2}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{i\,\mathrm{d}z}{az^2 - z(a^2+1) + a}.$$

Poslední integrál závisí na a podle toho, kde leží kořeny výrazu ve jmenovateli. Snadno určíme[34], že jmenovatel nabývá nulových hodnot v bodech a a $1/a$. Podle reziduové věty tedy bude

$$\text{pro } |a|<1: \quad I(a) = 2\pi i \operatorname{res}_a \frac{i}{az^2 - z(a^2+1)+a} = 2\pi i \frac{i}{2az - (a^2+1)}\bigg|_{z=a} = \frac{2\pi}{1-a^2},$$
$$\text{pro } |a|>1 \quad I(a) = 2\pi i \operatorname{res}_{1/a} \frac{i}{az^2 - z(a^2+1)+a} = 2\pi i \frac{i}{2az - (a^2+1)}\bigg|_{z=1/a} = \frac{2\pi}{a^2-1}.$$

Pro $|a| = 1$ nemůžeme použít reziduovou větu, neboť integrační křivka by procházela pólem. Při $a = \pm 1$ můžeme snadno ukázat, že integrál diverguje: v okolí $\pi/2$ a $3\pi/2$ se funkce $1/(1-\cos z)$ chová jako $1/z^2$

$$\frac{1}{1-\cos z} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z^2}{4!} + \dots}.$$

Pro ostatní komplexní jednotky a bychom museli použít trik s „obcházením" jednonásobných pólů a počítali bychom hlavní hodnotu integrálu.

IV. Integrály typu[35] $\displaystyle I = \int_0^{\infty} z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z$ pro $a \in \mathbb{C},\ a \notin \mathbb{Z}$.

O funkci f předpokládáme, že je meromorfní na $\mathbb{C}$, že nemá póly na $\langle 0; \infty)$ a v nekonečnu klesá „dostatečně rychle" — přesný tvar této a případně i dalších podmínek odvodíme při výpočtu. Při integraci v komplexní rovině si musíme uvědomit, že z^{a-1} není spojitá (a tím méně holomorfní) na jedné polopřímce Ω_φ, která samozřejmě nesmí procházet integračním oborem. Vhodným řešením může být integrační křivka γ znázorněná na obrázku (15) a volba $\varphi = 0$; její parametrizace vypadá následovně (ε, α „malá", R „velké"):

$$\varphi_1(t) = te^{i\alpha},\ t \in \langle \varepsilon; R\rangle, \qquad \varphi_2(t) = Re^{it},\ t \in \langle \alpha; 2\pi - \alpha\rangle,$$
$$\varphi_3(t) = te^{i(2\pi-\alpha)},\ t \in \langle \varepsilon; R\rangle, \qquad \varphi_4(t) = \varepsilon e^{it},\ t \in \langle \alpha; 2\pi - \alpha\rangle,$$
$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4.$$

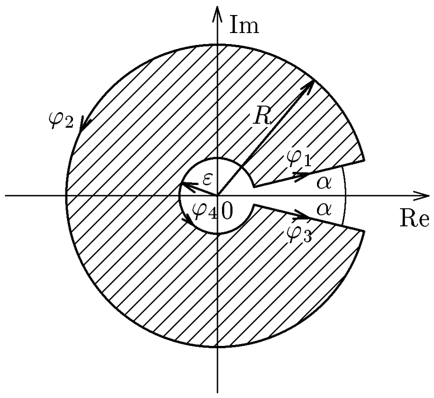
Integrály přes φ_1 a $-\varphi_3$ se v limitě neodečtou právě díky tomu, že z^{a-1} je na kladné reálné poloose nespojitá. Mocnina z^{a-1} podle definice bude

$$z^{a-1} = e^{(a-1)\ln_0 z}, \qquad \ln_0 z = \ln|z| + i\arg_0 z, \qquad \arg_0 z \in \langle 0; 2\pi).$$

O integrálech přes oblouky φ_2 a φ_4 ukážeme, že při $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ oba konvergují k nule. Budeme proto potřebovat odhadnout, jak rychle roste v obou limitách mocnina z^{a-1}; položíme $a = \alpha + i\beta$.

[34] Labužníci poznávají reciprokou rovnici.

[35] Větev nejednoznačné funkce mocniny zvolíme v průběhu výpočtu.



Obrázek 15: Integrační křivka pro Mellinovy transformace.

$$\left|z^{a-1}\right| = \left|e^{(a-1)\ln_0 z}\right| = e^{\mathrm{Re}[(a-1)\ln_0 z]};$$
$$\mathrm{Re}\left[(a-1)\ln_0 z\right] = \mathrm{Re}(a-1)\,\mathrm{Re}(\ln_0 z) - \mathrm{Im}(a-1)\,\mathrm{Im}(\ln_0 z) = (\alpha-1)\ln|z| - \beta\arg_0 z,$$
$$\left|z^{a-1}\right| = e^{(\alpha-1)\ln|z| - \beta\arg_0 z} \le |z|^{\alpha-1} e^{|\beta|2\pi}.$$

Nyní již můžeme omezovat samotné integrály. V případě φ_4 využijeme skutečnosti, že f je v 0 holomorfní, a tudíž omezená. Upotřebíme též větu (21).

$$\left|\int_{\varphi_4} z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le e^{2\pi|\beta|}\varepsilon^{\alpha-1} \max_{|z|=\varepsilon} \left|f(z)\right| \cdot 2\pi\varepsilon \le K\varepsilon^{\alpha}.$$

Vidíme, že pokud $\mathrm{Re}\, a = \alpha > 0$, pak tento integrál k nule skutečně konverguje. Dále budeme zkoumat „velký“ oblouk

$$\left|\int_{\varphi_2} z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le e^{2\pi|\beta|} R^{\alpha-1} \max_{|z|=R} \left|f(z)\right| \cdot 2\pi R = K R^{\alpha-A} M_R R^A.$$

Zde vidíme výše zmíněnou podmínku, kterou je vhodné požadovat pro f. Pokud je $M_R R^A$ shora omezené při $R \to \infty$, pak pro všechna $\alpha < A$ integrál konverguje k nule.

Konečně se můžeme zaměřit na úsečky φ_1, φ_3. Před integrací provedeme pomocný výpočet

$$\left(te^{i\alpha}\right)^{a-1} = e^{(a-1)\ln_0 te^{i\alpha}} = e^{(a-1)(\ln t + i\alpha)} = t^{a-1} e^{i\alpha(a-1)}$$
$$\text{a podobně } \left(te^{i(2\pi-\alpha)}\right)^{a-1} = t^{a-1} e^{i(2\pi-\alpha)(a-1)};$$

samotná integrace spolu s provedením příslušných limit

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0^+ \; R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\gamma z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}t - e^{2\pi i a} \int_0^\infty t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}t = I\left(1 - e^{2\pi i a}\right).$$

Označíme W konečnou množinu všech pólů funkce f. Mocnina z^{a-1} není holomorfní pouze na polopřímce Ω_φ vycházející z počátku pod úhlem φ (vybraným úhlem jednoznačné větve), jiné singularity v $\mathbb{C}$ nemá. Podle reziduové věty tedy závěrem

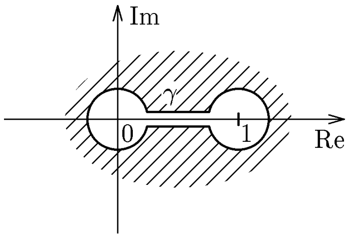
$$2\pi i \sum_{w\in W} \mathrm{res}_w\, z^{a-1} f(z) = \int_\gamma z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

pokud zvolíme R, ε a α tak, že všechny póly z W již leží uvnitř γ (množina W je konečná).

Zjistili jsme, že pro $a = \alpha + \beta i$ můžeme integrál I vypočítat jako

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{w\in W} \mathrm{res}_w\, z^{a-1} f(z) \qquad \text{pro} \qquad \alpha \in (0; A), \quad a \notin \mathbb{N} \tag{31}$$

za předpokladu, že f je meromorfní v $\mathbb{C}$, nemá v póly na kladné reálné ose a $R^A M_R$ je omezené pro $R \to \infty$. Integrál tohoto typu představuje předpis pro integrální *Mellinovu transformaci*, která funkci $f(z)$ přiřazuje funkci $F(a)$.



Obrázek 16: Integrační křivka pro integrály, které lze substitucí $\xi = z/(1-z)$ převést na Mellinovu transformaci.

Příklad: Při $\alpha \in (0;1)$ a $b > 0$ vypočítejme

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}z}{z+b}, \qquad \alpha = 1-a$$

Všechny výšeuvedené podmínky pro f jsou splněny; vidíme, že výraz $RM_R = R \max_{|z|=R} \left|1/(z+b)\right|$ konverguje k jedné, a tudíž je omezený. Integrand tedy klesá v nekonečnu dostatečně rychle pro $\alpha \in (0;1)$, čemuž odpovídají $a \in (0;1)$. Podle (31) pak bude

$$I = \frac{1}{1-e^{2\pi i(1-a)}} 2\pi i \operatorname{res}_{-b} \frac{z^{-a}}{z+b} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i(1-a)}}(-b)^{-a}.$$

Podle definice vypočítáme mocninu

$$(-b)^{-a} = e^{-a(\ln|b| + \arg_0 -b)} = e^{-a(\ln b + i\pi)} = b^{-a}e^{-i\pi a}.$$

Po dosazení a úpravou dostaneme

$$I = \frac{b^{-a}2\pi i e^{-i\pi a}}{1-e^{-2\pi i a}} = \frac{\pi b^{-a}}{\sin \pi a}.$$

V. Integrály typu $\displaystyle\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Substitucí $\xi = z/(1-z)$, $\xi \in (0;\infty)$ přejdou na tvar

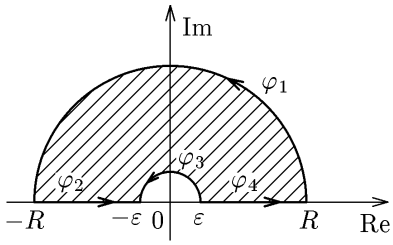
$$\int_0^\infty \xi^\alpha \frac{f\left(\frac{\xi}{1+\xi}\right)}{\xi(1+\xi)}\,\mathrm{d}\xi,$$

který odpovídá Mellinově transformaci. Druhou možností je provést přímý výpočet pomocí reziduové věty: integrujeme přes hranici plochy tvaru činky (viz obrázek 16) — „vyhýbáme se“ bodům $z = 0$ a $z = 1$. Příklad je podrobně rozebrán v Kopáčkových skriptech.

Příklad: Uvědomme si, že popsaná substituce popisuje v limitním případě právě transformaci integrační křivky v tomto případě na křivku, po níž jsme integrovali při zkoumání Mellinovy transformace. Pro z blízké nule má transformace tvar $\xi = z$, tedy kružnice kolem 0 se zachovává. Při $z = 1 + \varepsilon$, kde ε je komplexní číslo s malou absolutní hodnotou, je $\xi = 1/\varepsilon$: kružnice kolem bodu $z = 1$ se zobrazuje na „velkou“ kružnici — se středem v nule a poloměrem $1/|\varepsilon|$. Konečně body $z \in (0;1)$ se zobrazí na $(0;\infty)$, což odpovídá zobrazení dvou úseček podél reálné osy.

VI. Integrály typu

$$I = \int_0^\infty f(x) \ln x \,\mathrm{d}x.$$



Obrázek 17: Integrační křivka pro integrály typu $\int_0^\infty f(z)\ln z\,\mathrm{d}z$.

Po funkci f požadujeme, aby byla meromorfní na horní polorovině (pro z, $\operatorname{Im} z \geq 0$), neměla pól v nule a byla sudá na $\mathbb{R}$. Kromě toho opět odvodíme určitý požadavek na její chování v nekonečnu.

Integrovat budeme tentokrát po hranici půlkruhu a budeme se vyhýbat bodu $z = 0$ — viz obrázek (17). Řádně zapsáno

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= Re^{it},\ t \in \langle 0; \pi\rangle, \qquad & \varphi_2(t) &= t,\ t \in \langle -R; -\varepsilon\rangle, \\ \varphi_3(t) &= \varepsilon e^{it},\ t \in \langle 0; \pi\rangle, \qquad & \varphi_4(t) &= t,\ t \in \langle \varepsilon; R\rangle, \end{aligned}$$
$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4.$$

Zvolíme větev logaritmu odpovídající $\varphi = -\pi/2$ — tak, aby polopřímka Ω_φ, na níž je logaritmus nespojitý, neprocházela integračním oborem. Připomeňme, že potom bude

$$\ln_{-\pi/2} z = \ln|z| + i\arg_{-\pi/2} z, \qquad \arg_{-\pi/2} z \in \langle -\pi/2; 3\pi/2).$$

Označíme $M_R = \max_z |f(z)|$ maximum přes oblouk φ_1 a M_ε maximum $|f(z)|$ přes okolí nuly, v němž je f holomorfní, a tedy omezená. Integrály přes φ_3 a φ_1 pak omezíme

$$\left|\int_{\varphi_3} f(z)\ln z\,\mathrm{d}z\right| \leq M_\varepsilon \pi\varepsilon \max_{z\in\varphi_3}\bigl(\ln|z| + \arg_{-\pi/2} z\bigr) \leq K\varepsilon(\ln\varepsilon + \frac{3}{2}\pi),$$
$$\left|\int_{\varphi_1} f(z)\ln z\,\mathrm{d}z\right| \leq M_R\pi R \max_{z\in\varphi_1}\bigl(\ln|z| + \arg_{-\pi/2} z\bigr) \leq \pi M_R R(\ln R + \frac{3}{2}\pi).$$

Zatímco omezení pro integrál přes φ_3 konverguje k nule pro $\varepsilon \to 0$ vždy[36], ve druhém případě vidíme, že na funkci f je třeba klást požadavek $RM_R\ln R \to 0$ při $R \to \infty$.

Prozkoumáme ještě integrál přes φ_2.

$$\int_{\varphi_2} f(z)\ln z\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^0 f(t)\bigl(\ln|t| + \pi i\bigr)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\ln t\,\mathrm{d}t + \pi i\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t,$$

neboť funkce $f(z)$ a $\ln|z|$ jsou sudé.

Označíme-li W množinu všech pólů funkce f v horní polorovině (logaritmus má opět jediný pól v nule), bude podle reziduové věty v limitě platit

$$2\pi i\sum_{w\in W}\operatorname{res}_w\bigl[f(z)\ln z\bigr] = \int_\gamma f(z)\ln z\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_2} f(z)\ln z\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_4} f(z)\ln z\,\mathrm{d}z = 2I + \pi i\int_0^\infty f(z)\,\mathrm{d}z.$$

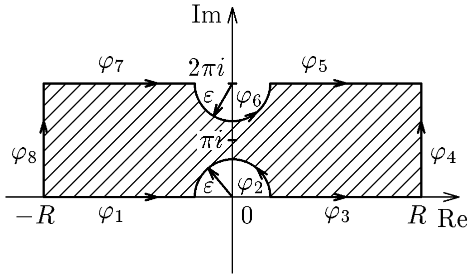
Předpokládáme, že f je meromorfní na horní polorovině, nemá pól v nule, je sudá[37] na $\mathbb{R}$ a v nekonečnu klesá tak, že $RM_R\ln R \to 0$. Poslední podmínka je splněna například pro funkce omezené $1/R^n$, $n > 1$. Všimněme si ještě, že tímto způsobem současně spočítáme integrál z $f(z)$ i $f(z)\ln z$.

Příklad: Zjistěme

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

[36] Platí $|z\ln z| \leq |z|\cdot\bigl|\ln|z| + 2\pi\bigr|$. Limitu druhého výrazu spočítáme snadno v reálných číslech l'Hôspitalovým pravidlem.

[37] Funkci f v obecném případě bohužel nestačí „sudě dodefinovat“ na $(-\infty; 0)$ — výsledek by nemusel být v nule holomorfní.



Obrázek 18: Integrační plocha pro funkci, která má na imaginární ose nekonečně mnoho pólů.

Funkce $1/(z^2+1)^2$ klesá jako $1/z^4$, což podmínkám výše popsaného postupu vyhovuje. V horní polorovině má tato funkce jediný pól v $z=i$, jeho násobnost je 2. Dle bodu 4 věty (35) vypočítáme reziduum

$$\operatorname{res}_i \frac{\ln_{-\pi/2} z}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i}\left[\frac{\ln_{-\pi/2} z}{(z^2+1)^2}(z-i)^2\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{\ln_{-\pi/2} z}{(z+i)^2}\right]' =$$

$$= \left.\frac{(z+i)^2/z - 2(z+i)\ln_{-\pi/2} z}{(z+i)^4}\right|_{z=i} = \frac{\pi}{8}+\frac{i}{4}, \text{ neboť } \ln_{-\pi/2} i = \ln|i| + i\arg_{-\pi/2} i = i\frac{\pi}{2}.$$

Po vynásobení faktorem $2\pi i$ dostáváme, že

$$\frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2} = 2\int_0^\infty \frac{1}{(z^2+1)^2}\ln z\,\mathrm{d}z + \pi i\int_0^\infty \frac{1}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(z^2+1)^2}\ln z\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}.$$

Na závěr ještě ukážeme případ, kdy integrujeme funkci, která sice je meromorfní, ale má v $\mathbb{C}$ nekonečně mnoho pólů.

Příklad: Spočítejme

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x.$$

Určíme nejprve póly integrandu (značme jej f). Víme, že mezi funkcemi $\sin x$ a $\operatorname{sh} x$ platí vztah $\operatorname{sh} ix = i\sin x$. Již dříve jsme zjistili, že funkce $\sin x$ má kořeny pouze pro $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Hyperbolický sinus proto má kořeny právě v bodech $x=ki\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Nebude tedy vhodné integrovat přes hranici půlkruhu, neboť bychom nemohli použít reziduovou větu. Budeme integrovat přes obdélník délky $2R$ a výšky 2π, přičemž obejdeme nulu a bod $2\pi i$, viz obrázek (18). Žádaný integrál dostaneme ve smyslu hlavní hodnoty. Přejdeme-li od sinu ke komplexní exponenciále a napíšeme-li

$$e^{ia(z+2\pi i)} = e^{-2\pi a}e^{iaz}, \qquad \operatorname{sh}(z+2\pi i) = \operatorname{sh} z\operatorname{ch} 2\pi i + \operatorname{ch} z\operatorname{sh} 2\pi i = \operatorname{sh} z,$$

vidíme, že integrál přes horní dlouhou stranu obdélníka bude[38] $-e^{-2\pi a}$ násobek integrálu přes dolní stranu. Integrály přes boční krátké strany budou patrně konvergovat k nule jako $1/\operatorname{sh} R$. Provedeme tedy výpočet.

Parametrizace integrační křivky

[38] Integrujeme v opačném směru.

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t,\ t \in \langle -R; -\varepsilon\rangle, & \varphi_2(t) &= \varepsilon e^{it},\ t \in \langle 0; \pi\rangle,\\ \varphi_3(t) &= t,\ t \in \langle \varepsilon; R\rangle, & \varphi_4(t) &= R + it,\ t \in \langle 0; 2\pi\rangle,\\ \varphi_5(t) &= t + 2\pi i,\ t \in \langle \varepsilon; R\rangle, & \varphi_6(t) &= 2\pi i + \varepsilon e^{it},\ t \in \langle \pi; 2\pi\rangle,\\ \varphi_7(t) &= t + 2\pi i,\ t \in \langle -R; -\varepsilon\rangle, & \varphi_8(t) &= -R + it,\ t \in \langle 0; 2\pi\rangle, \end{aligned}$$

$$\gamma = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_5 - \varphi_6 - \varphi_7 - \varphi_8.$$

Vyšetřeme nejprve integrály přes φ_4 a φ_8. Platí

$$\left|\int_{\varphi_4} \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{ia(R+it)}}{\operatorname{sh} R + it} i\right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-at}}{\left|e^{R+it} - e^{-R-it}\right|}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{2\pi} \frac{2e^{2\pi|a|}\,\mathrm{d}t}{\left||e^{R+it}| - |e^{-R-it}|\right|} = \frac{e^{2\pi|a|}}{|\operatorname{sh} R|},$$

což pro $R \to \infty$ konverguje bezpečně k nule. Stejnou úvahu lze učinit i pro φ_8.

Integrály přes φ_2 a φ_6 vypočítáme s pomocí lemmatu o obcházení pólů. Rezidua v bodech 0 a $2\pi i$ určíme obvyklým postupem z věty (35) bodu 2; vypočítáme i reziduum v bodě $i\pi$, které budeme nakonec také potřebovat.

$$\operatorname{res}_0 \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x} = e^{iax}\Big|_{x=0} \operatorname{res}_0 \frac{1}{\operatorname{sh} x} = 1 \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} x}\bigg|_{x=0} = 1,$$

$$\operatorname{res}_{\pi i} \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^{-a\pi}}{\operatorname{ch} \pi i} = e^{-a\pi}, \qquad \operatorname{res}_{2\pi i} \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^{-2a\pi}}{\operatorname{ch} 2\pi i} = e^{-2a\pi}.$$

Využíváme rovnosti $\operatorname{ch} ix = \cos x$. Podle zmíněného lemmatu pak bude

$$\int_{\varphi_2} f = i\pi \operatorname{res}_0 f = i\pi, \qquad \int_{\varphi_6} f = i\pi \operatorname{res}_{2\pi i} f = \pi i e^{-2a\pi}.$$

Připomeňme ještě, že podle úvahy na začátku řešení

$$\int_{\varphi_7} f = e^{-2\pi a} \int_{\varphi_1} f, \qquad \int_{\varphi_5} f = e^{-2\pi a} \int_{\varphi_3} f.$$

Konečně tedy můžeme použít reziduovou větu; uvnitř γ je jediný pól, a to v bodě πi. Hledaný integrál přes $\mathbb{R}$ označíme I ($I = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_3} f$) a přejdeme k $R \to \infty$.

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{-a\pi} = 2\pi i \operatorname{res}_{\pi i} f = \int_\gamma f &= \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_3} f - \int_{\varphi_5} f - \int_{\varphi_7} f - \int_{\varphi_2} f - \int_{\varphi_6} f = \\ &= I - e^{-2\pi a} I - i\pi - \pi i e^{-2a\pi} \\ I = \pi i \frac{e^{-2a\pi} + 2e^{-a\pi} + 1}{1 - e^{-2a\pi}} &= \pi i \frac{\operatorname{ch} \frac{a\pi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{a\pi}{2}} = \pi i \operatorname{cth} \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

Imaginární část ($\pi \operatorname{cth} a\pi/2$) tohoto integrálu je rovna původnímu reálnému integrálu se sinem, reálná část je rovna analogickému integrálu s kosinem. To, že je nulová odpovídá skutečnosti, že při nahrazení sinu kosinem integrujeme lichou funkci přes $\mathbb{R}$.

Dodejme ještě na závěr, že kdybychom použili substituci $z = e^x$, k níž integrand přímo vybízí, dostali bychom

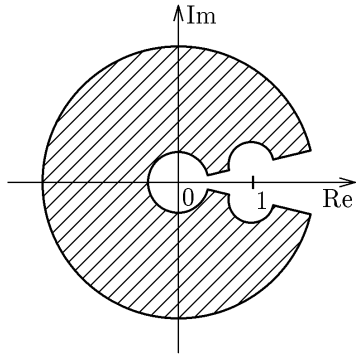
$$\int_0^\infty \frac{2z^{ia}}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z,$$

což je tvar Mellinovy transformace. Nevýhoda je, že funkce $1/(z^2 - 1)$ má pól v $z = 1$, a proto nelze zcela přímo použít již popsaný postup. Navržená křivka γ by se touto substitucí přeměnila na křivku použitou při řešení Mellinova integrálu s tím, že bychom ještě navíc obcházeli bod $z = 1$, viz obrázek (19).

Cvičení: U dvou křivek γ zmíněných v minulém odstavci ověřte, že transformací $z = e^x$ přejde φ_4 na „obchvat“ kolem $z = 0$, φ_8 na „velkou“ kružnici, jediný pól uvnitř křivky v πi na jediný pól uvnitř křivky v -1, φ_1 a φ_3 na úsečky $(0; 1)$ a $(1; \infty)$ nad reálnou osou (argument 0), φ_5 a φ_7 na tytéž úsečky pod reálnou osou (argument 2π) a konečně φ_2 a φ_6 na „obchvat“ bodu $z = 1$.

§14. Singularity v nekonečnu: rezidua diferenciálních forem, součet reziduí na $\mathbb{C}^*$

Poznámka: Prozatím jsme se zabývali izolovanými singularitami meromorfní funkce v bodech komplexní roviny. Nyní, vedeni dříve konstruovanými izomorfismy mezi množinami $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, S_2 a $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$



Obrázek 19: Oblast na obr. () po transformaci $w = e^z$.

s operacemi sčítání a násobení, zavedeme pojem izolované singularity komplexní funkce v nekonečnu. Představte si význam následující definice na Riemanově sféře a porovnejte definici izolované singularity v bodě komplexní roviny a v nekonečnu.

Definice 23: Izolované singularity v nekonečnu a jejich klasifikace
Řekneme, že funkce $f(z)$ má v nekonečnu *izolovanou singularitu*, pokud existuje takové kladné reálné číslo R, že funkce $f(z)$ je *holomorfní na množině* $\{z \in \mathbb{C}, |z| > R\}$. Řekneme, že funkce $f(z)$ má v nekonečnu po řadě *odstranitelnou singularitu, pól, podstatnou singularitu*, pokud funkce $f(1/z)$ má v bodě 0 odstranitelnou singularitu, pól, podstatnou singularitu.

P o z n á m k a o alternativní definici klasifikace izolovaných singularit v nekonečnu: Alternativně lze klasifikovat singularity v nekonečnu pomocí limity funkce v nekonečnu (a tedy chování funkce na okolí nekonečna), podobně jako se klasifikovaly izolované singularity v bodech komplexní roviny. Tato klasifikace, jak lze snadno ověřit, se shoduje s klasifikací izolovaných singularit v nekonečnu zavedenou definicí (23). Další analogie s izolovanými singularitami v bodech komplexní roviny jsou shrnuty v následující větě.

Věta 36: Identifikace izolovaných singularit v nekonečnu
Nechť $f(z)$ má izolovanou singularitu v nekonečnu. Nechť řada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ je Laurentova řada funkce $f(z)$ v okolí nekonečna[39]. Potom platí:

1. Funkce $f(z)$ má v nekonečnu *odstranitelnou singularitu* právě tehdy, když pro všechny členy Laurentovy řady pro $n > 0$ platí $c_n = 0$.
2. Funkce $f(z)$ má v nekonečnu *pól* násobnosti $m_0 > 0$ právě tehdy, když $c_{m_0} \neq 0$ a pro všechny $n > m$ platí $c_n = 0$.
3. Funkce $f(z)$ má v nekonečnu *podstatnou singularitu* právě tehdy, když pro každé m_0 kladné existuje $n > m_0$ takové, že $c_n \neq 0$.

Důkaz: Vedeni definicí (23) budeme vyšetřovat chování funkce $f(1/z)$ v okolí bodu 0. Laurentova řada funkce $f(1/z)$ v okolí 0 má tvar, jak plyne z předpokladů věty, $\sum_{-\infty}^{\infty} c_{-n} z^n$. K dokončení důkazu již nyní stačí použít definici (20) izolovaných singularit v bodech komplexní roviny.

P o z n á m k a k zavedení rezidua funkce v nekonečnu: Již jsme se důkladně seznámili s pojmem rezidua funkce v bodech komplexní roviny. Zkusme, vedeni analogií vzorce $\operatorname{res}_a f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\varepsilon(a)} f(z)\, \mathrm{d}z$, definovat reziduum v nekonečnu.

Definice 24: Reziduum funkce v nekonečnu
Nechť má funkce $f(z)$ v nekonečnu izolovanou singularitu. Potom definujeme *reziduum* funkce $f(z)$ v

[39] Chápejme toto jako definici Laurentovy řady v nekonečnu; předpokládáme, že existuje $R > 0$ tak, aby se $f(z)$ rovnalo uvedené řadě na $U^*_R(\infty)$

nekonečnu následujícím předpisem:

$$\mathrm{res}_{\infty} f = -\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

P o z n á m k a k definici rezidua funkce v nekonečnu: Limitu integrálu funkce bereme s opačným znaménkem, neboť nekonečno při integraci obíháme v záporném smyslu. Pokud $U_R(0)$ a $U_R(\infty)$ obíháme ve stejném směru po jejich společné hranici, je orientace jednou kladná a podruhé opačná.

Věta 37: o vztahu rezidua funkce v nekonečnu a jeho Laurentovy řady

Je-li $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ Laurentova řada funkce $f(z)$ v okolí nekonečna, potom platí:

$$\mathrm{res}_{\infty} f = -c_{-1}$$

Důkaz: Pro dostatečně velké R platí

$$\mathrm{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n\,\mathrm{d}z = -c_{-1}.$$

P o z n á m k a o změně souřadnic: Residuum diferenciální formy, jejíž koeficient má v daném bodě isolovanou singularitu, je integrál této formy přes malou kružnici kolem singularity. To lze definovat pro jakoukoliv formu s hladkými koeficienty (ani nemusí mít tvar $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$, kde f je holomorfní). Obecně ovšem tento integrál závisí na poloměru kružnice.

Pokud je uvažovaná forma *uzavřená,* pak tento integrál na poloměru nezávisí (je dobré cvičení si uvědomit, že existují ještě jiné uzavřené formy v rovině než forma tvaru $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$, kde f je holomorfní). Od minulého semestru víme, že integrál z diferenciální formy nezávisí na tom, v kterých souřadnicích ho počítám. Specielně, je-li ϕ prosté a holomorfní zobrazení oblasti U_1 na oblast U_2 a je-li γ cesta v U_1, pak nutně

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\phi\circ\gamma} f(\phi^{-1}(w))(\phi^{-1}(w))'\,\mathrm{d}w.$$

Bod ∞ je na Riemannově sféře bod jako každý jiný. Vypadá trochu jinak, než ostatní body jen díky naší konvenci, naší volbě bodu pro stereografickou projekci. Stačí uvažovat souřadnice $w = \frac{1}{z}$, které bod ∞ převedou do nuly. Nejprve tedy přenesme formu ω zobrazením $\varphi(z)$:

$$\varphi^*(\omega) = f\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z.$$

Nechť řada $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ je Laurentovu řadou funkce $f(z)$ v okolí nekonečna. Potom platí

$$\mathrm{res}_{\infty} f(z) = \mathrm{res}_{\infty}\omega = \mathrm{res}_0 \varphi^*(\omega) = \mathrm{res}_0\left[-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = \mathrm{res}_0\left[-\frac{1}{z^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{z}\right)^n\right] = -c_{-1}.$$

To je vysvětlení, proč se definuje residuum v bodě ∞ tak, jak jsme to udělali.

Věta 38: O součtu reziduí na $\mathbb{C}^*$

Nechť funkce f je holomorfní v komplexní rovině mimo konečně mnoha bodů — označme jejich množinu A. Potom platí

$$\sum_{a\in A\cup\{\infty\}} \mathrm{res}_a f = 0.$$

Důkaz: Z konečnosti množiny A plyne, že její prvky jsou izolovanými singularitami funkce f, pokud jsou vůbec jejími singularitami. Dále z konečnosti A plyne, že všechny její prvky leží v kruhu o dostatečně velkém poloměru s počátkem v nule, označme tento poloměr R. Potom i nekonečno je izolovanou singularitou funkce f. Dále, dle reziduové věty platí:

$$\sum_{a\in A} \mathrm{res}_a f = \int\limits_{\partial U_R(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{res}_{\infty} f.$$

Poslední rovnost plyne z definice rezidua v nekonečnu a z toho, že funkce f je vně kruhu $U_R(0)$ holomorfní a tedy její integrál přes libovolnou uzavřenou křivku, která jednou oběhne počátek, je stejný.

P ř í k l a d : Vypočítejte

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7}\,\mathrm{d}z,$$

je-li integrační křivka kladně orientována.

Protože pro všechny kořeny rovnice $1+z^7=0$ platí $|z|=1$, leží všechny její kořeny uvnitř oblasti přes kterou se integruje. Ovšemže potom platí:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7}\,\mathrm{d}z = -2\pi i \mathrm{res}_\infty f$$

Nyní již jen zbývá určit reziduum funkce f v nekonečnu — to určíme podle předchozí poznámky o výpočtu rezidua v nekonečnu:

$$\mathrm{res}_\infty \frac{z^6}{1+z^7} = \mathrm{res}_0 \frac{\frac{1}{z^6}}{1+\frac{1}{z^7}}\frac{-1}{z^2} = \mathrm{res}_0 \frac{-1}{z(1+z^7)} = -1.$$

Nezbývá než příklad dokončit:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{|a|<2} \mathrm{res}_a \frac{z^6}{z^7+1} = -2\pi i\, \mathrm{res}_\infty \frac{z^6}{z^7+1} = 2\pi i.$$

§15. Důsledky Cauchyova vzorce: základní věta algebry, věta o jednoznačnosti holomorfní funkce

Věta 39: Součet reziduí na $\mathbb{C}^*$
Nechť f je holomorfní funkce $\mathbb{C}$ a nechť existuje přirozené číslo p a kladné reálné číslo K, že pro všechna kladná reálná čísla R platí:

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \le K\ R^p$$

Potom f je polynom stupně nejvýše p.

P o z n á m k a o alternativní formulaci podmínky věty: Podmínku lze reformulovat. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$|f(z)| \le K\ |z|^p$$

Důkaz: Protože f je holomorfní v $\mathbb{C}$ lze ji vyjádřit jako součet Taylorovy řady, tzn. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Podle Cauchyova vzorce platí pro koeficienty této mocninné řady následující vztah:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

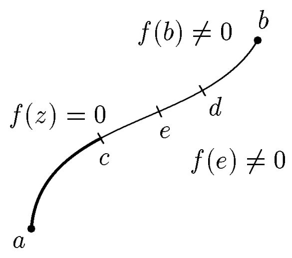
Odhademe absolutní hodnotu jednotlivých koeficientů Laurentovy řady, využijeme holomorfnosti integrované funkce mimo nulu:

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{R^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Nyní použiji předpokladu věty: pro libovolné $R>0$

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} \frac{KR^p}{R^{n+1}}\,\mathrm{d}z \le \frac{KR^p}{R^n}.$$

Limitní přechod v posledním výrazu ukazuje, že $c_n = 0$ pro každé $n > p$. Nezbývá než shrnout naše poznatky: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{p} c_n z^n$.



Obrázek 20: K důkazu věty o jednoznačnosti holomorfní funkce

Věta 40: Liouvillova
Je-li holomorfní funkce na $\mathbb{C}$ omezená, potom je konstantní.

Důkaz: Je-li funkce holomorfní f omezená na $\mathbb{C}$ existuje K reálné, že platí $|f(z)| < K$. Nyní stačí použít předchozí větu pro $p = 0$.

Věta 41: Základní věta algebry
Nechť f je polynom stupně alespoň 1. Potom existuje $z \in \mathbb{C}$, že platí $f(z) = 0$.

Důkaz: Předpokládejme, že f je polynom stupně alespoň 1 a pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí, že $f(z) \neq 0$. Víme ($a_n \neq 0$), že

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \ldots + a_0\frac{1}{z^n})} = 0,$$

tedy $\frac{1}{f(z)}$ je omezená vně dostatečně velkého kruhu. Je ale omezená i uvnitř tohoto kruhu, protože je spojitá. Protože $f(z)$ je holomorfní a různá od nuly, je taková i $\frac{1}{f(z)}$. Podle Liouvillovy věty je $\frac{1}{f(z)}$ konstantní, a proto je konstantní i funkce $f(z)$. Konstanta ale není polynomem stupně alespoň jedna, což je spor.

Věta 42: O jednoznačnosti holomorfní funkce

1. Nechť f je holomorfní v oblasti Ω a není identicky nulová. Potom množina $A = \{z \in \Omega | f(z) = 0\}$ nemá hromadný bod[40] v Ω.
2. Nechť f a g jsou holomorfní funkce v oblasti Ω. Nechť jsou si tyto dvě funkce rovny na množině $A \subset \Omega$. Má-li A hromadný bod v Ω, jsou si obě funkce rovny na celé oblasti Ω.

Lemma:
Nechť f je holomorfní v Ω, kde Ω je oblast v $\mathbb{C}$. Nechť je $a \in \Omega$ takový, že platí $f(a) = 0$. Potom existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro všechna $z \in U_\varepsilon^*(a) \cap \Omega$ platí $f(z) \neq 0$ nebo pro všechna taková z platí $f(z) = 0$.

Důkaz lemmatu: Protože $a \in \Omega$, lze na nějakém okolí U_1 bodu a, které leží v Ω, vyjádřit $f(z)$ jako $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Nechť všechna c_n nejsou nulová, označím n_0 nejmenší n takové, že $c_n \neq 0$. V opačném případě je zřejmě funkce $f(z)$ nulová na uvažovaném okolí.

Uvážím funkci $g(z) = f(z)/(z-a)^{n_0}$. Funkce $g(z)$ je holomorfní na tomto okolí a nenulová v a. Ze spojitosti $g(z)$ však plyne, že existuje okolí U_2 bodu a, kde je funkce $g(z)$ nenulová. Protože $(z-a)^{n_0}$ je nenulová na U_1 mimo bod a, je funkce $f(z) = (z-a)^{n_0} g(z)$ nenulová na $U_1 \cap U_2$, mimo bod a. Tím je lemma dokázáno.

Důkaz věty:

1. Nechť A má hromadný bod a v Ω. Podle lemmatu existuje redukované okolí $U^*(a)$ takové, že $f(z)$ je na tomto okolí buď nenulová nebo identicky rovná nule. Protože je však a hromadným bodem množiny A, je na zmíněném redukovaném okolí funkce $f(z)$ identicky rovna nule. Nechť $b \in \Omega$ je takový bod, že $f(b) \neq 0$. Protože Ω je souvislá, existuje křivka spojující a a b. Po cestě z a do b po γ označím c první bod na této křivce takový, že funkce $f(z)$ je mezi a a c na této křivce nulová a pro každý bod d na této křivce mezi c a b existuje bod e mezi c a d, že $f(e) \neq 0$ (srovnej s obrázkem 20).

[40] a je hromadný bod množiny A, pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A \setminus \{a\})\big(x \in U_\varepsilon(a)\big)$.

Ze spojitosti funkce $f(z)$ plyne $f(c) = 0$. Potom ovšemže podle lemmatu je funkce $f(z)$ buď nulová na nějakém okolí bodu c, a tudíž lze zvolit c dále na křivce, nebo nenulová na nějakém redukovaném okolí bodu c, a potom nemůže být $f(z)$ mezi a a c na uvažované křivce nulová. Tím jsme rozebrali všechny možnosti a zjistili, že ani jedna z nich není možná. Potom ale nemůže existovat takový bod b a tedy je funkce $f(z)$ na Ω identicky nulová.

2. Uvážím funkci $(f-g)(z)$. Dle předpokladu je nulová na množině s hromadným bodem v Ω, potom ale podle již dokázané první části věty musí nutně být tato funkce nulová v celé oblasti Ω, a tedy $f \equiv g$ na Ω.

Poznámka k větě o jednoznačnosti holomorfní funkce: Lze vyslovit analogickou větu pro meromorfní funkce.

Příklad: Uvažujme funkce $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ a $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$. Pro reálná čísla platí známý trigonometrický vztah: $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$. Protože tento vztah platí na množině s hromadným bodem v $\mathbb{C}$, takovou množinou reálná osa v komplexní rovině bezpochyby je, platí tento vztah podle předchozí věty v celé komplexní rovině, tj. pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Podobně lze zobecnit další známé vztahy.

Věta 43: Weierstrassova
Nechť jsou funkce f_n holomorfní v oblasti Ω. Nechť funkce f_n konvergují lokálně stejnoměrně k funkci f, tj. pro každý bod $a \in \Omega$, existuje jeho okolí $U(a)$, kde je tato konvergence stejnoměrná. Potom platí:

1. Funkce f je holomorfní v Ω.
2. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ konvergují k-té derivace funkcí f_n, tj. funkce $f_n^{(k)}$, lokálně stejnoměrně k funkci $f^{(k)}$.

Lemma:
Nechť φ je cesta. Nechť $F(z,w)$ je spojitá na $\langle\varphi\rangle \times \Omega$ a na této množině nechť jsou spojitě i $\partial F/\partial u$ a $\partial F/\partial v$, kde $w = u + iv$. Potom funkce $G(w) = \int_\varphi F(z,w)\,\mathrm{d}z$ má parciální derivace

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \int\limits_\varphi \frac{\partial F}{\partial u}(z,w)\,\mathrm{d}z \text{ a } \frac{\partial G}{\partial v} = \int\limits_\varphi \frac{\partial F}{\partial v}(z,w)\,\mathrm{d}z.$$

Je-li $F(z,w)$ holomorfní jako funkce w, je holomorfní i funkce G.

Důkaz lemmatu: Zvolím nějaký uzávěr K okolí bodu w v oblasti Ω, který leží celý v této oblasti. Protože jednotlivé parciální derivace jsou na množině K spojité nabývají zde jejich absolutní hodnoty maxima. Funkce identicky rovná tomuto maximu je poté integrovatelnou majorantou jednotlivých parciálních derivací funkce F podle u a v. Ostatní podmínky věty o záměně integrálu a derivace se již ověří snadno. Případná holomorfnost funkce G plyne z Cauchy-Riemannových podmínek, které splňuje funkce F v každém bodě množiny $\langle\varphi\rangle \times \Omega$. Potom nutně i G, z aditivity integrálu, splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky; pečlivěji zapsáno ($w = uiv$)

$$2\frac{\partial G}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial G}{\partial u} + i\frac{\partial G}{\partial v} = \int\limits_\varphi \frac{\partial F}{\partial u}(z,w)\,\mathrm{d}z + i\int\limits_\varphi \frac{\partial F}{\partial v}(z,w)\,\mathrm{d}z = \int\limits_\varphi \left[\frac{\partial F}{\partial u}(z,w) + i\frac{\partial F}{\partial v}(z,w)\right]\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz věty: Nechť z_0 je libovolný bod oblasti Ω. Zvolím takové jeho okolí $U(z_0)$, že na $\overline{U(z_0)}$ funkce konvergují stejnoměrně. Potom jsou splněny podmínky[41] pro limitní přechod za integračním znamením a lze psát v tomto okolí, $z \in U(z_0)$

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(z_0)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(z_0)} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Tedy funkce $f(z)$ je holomorfní v $U(z_0)$. Nyní použijeme lemma a indukcí podle k snadno nahlédneme, že platí:

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(z_0)} \frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial U(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi.$$

[41] Funkce $1/(\xi - z)$ je na $\partial U(z_0)$ omezená, a integrand tedy konverguje stejnoměrně.

Potom pro rozdíl derivací funkcí a jejich limity platí:

$$f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0)} \frac{f(\xi) - f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \, \mathrm{d}\xi.$$

Tento rozdíl však jde na nějakém okolí $U'(z_0)$ stejnoměrně k nule, neboť rozdíl $f(\xi) - f_n(\xi)$ jde vzhledem k z stejnoměrně k nule dle předpokladu a okolí $U'(z_0)$ lze zvolit uvnitř $U(z_0)$ tak, aby $\left|1/(\xi - z)^{k+1}\right| \leq K \in \mathbb{R}$ na $\partial U(z_0)$. Potom ale lze rozdíl těchto derivací na $U'(z_0)$ odhadnout následovně:

$$\left|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\partial U(z_0)} \frac{f(\xi) - f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \, \mathrm{d}\xi \right| \leq 2\pi R \frac{k!}{2\pi} K \max_{\xi \in \partial U(z_0)} |f(\xi) - f_n(\xi)|,$$

kde R je poloměr okolí $U(z_0)$. Tento rozdíl na z nezávisí, a proto při $n \to \infty$ konverguje pro všechna $z \in U'(z_0)$ stejnoměrně k nule.

Věta 44: o maximu modulu
Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní na oblasti Ω a její absolutní hodnota zde nabývá svého maxima v bodě $z_0 \in \Omega$. Potom je funkce $f(z)$ konstantní na Ω. Speciálně tedy funkce $|f(z)|$ při $f \in H(\overline{\Omega})$ nabývá svého maxima na $\partial\Omega$.

Poznámka k názvu věty: Absolutní hodnota komplexního čísla se též nazývá modul.

Lemma:
Nechť $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ na $\overline{U_R(z_0)}$. Potom platí:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + Re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n}.$$

Důkaz lemmatu: Lemma se dokáže snadno rozpisem integrálu:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} R^n R^m e^{i(n-m)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n},$$

neboť $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \, \mathrm{d}t = \delta_{nm}$.

Důkaz věty: Nechť absolutní hodnota funkce nabývá svého maxima v bodě $z_0 \in \Omega$. Uvážíme nějaké okolí $U(z_0)$ o poloměru R tohoto bodu, které leží celé v Ω. Protože je f holomorfní, lze ji na tomto okolí rozvinout do mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Potom ale platí

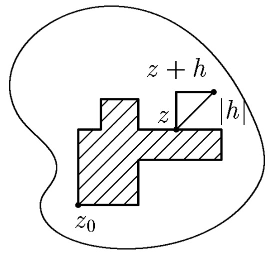
$$|a_0|^2 = \left|f(z_0)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(z_0)\right|^2 \mathrm{d}z \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + Re^{it})\right|^2 \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n}.$$

Vzhledem k tomu, že $R > 0$, musí nutně platit $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 1$. Potom je ale funkce $f(z)$ konstantní na $U(z_0)$ a podle věty o jednoznačnosti holomorfní funkce, je funkce $f(z)$ konstantní i na Ω, neboť z_0 je hromadný bod $U(z_0)$ v Ω.

Poznámka o minimu modulu: Jestliže je funkce $f(z)$ holomorfní a nekonstantní v oblasti Ω a je zde ve všech bodech nenulová, potom zde její absolutní hodnota nenabývá svého minima. Důkaz tohoto tvrzení plyne z předchozí věty aplikované na funkci $1/f(z)$.

Věta 45: Morerova
Nechť funkce $f(z)$ je spojitá na oblasti Ω. Nechť pro všechny hranice γ obdélníků v oblasti Ω platí, $\int\limits_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$. Potom je funkce $f(z)$ holomorfní na Ω.

Poznámka ke znění věty: Větu lze samozřejmě formulovat i ve slabší podobě, kde se za γ berou všechny uzavřené křivky. V předpokladech věty lze integrovat i přes jiné třídy křivek v Ω, např. přes hranice trojúhelníků. Čtenáře se zájmem o tuto problematiku odkazujeme na příslušnou literaturu.



Obrázek 21: K důkazu Morerovy věty

Úmluva: Lomenou čarou v důkazu této věty budeme rozumět křivku po částech rovnoběžnou s reálnou a imaginární osou.

Důkaz: Protože integrál podél obvodu libovolného obdélníku je nulový, integrál mezi dvěma body po lomené čáře nezávisí na její volbě — podrobně si rozmyslete a nakreslete si obrázek! Nechť z_0 je pevně zvolený bod v oblasti Ω, potom lze definovat funkci $g(z)$ jako hodnotu integrálu po lomené čáře z bodu z_0 do bodu z. Označme $L(z_0, z)$ lomenou čáru z bodu z_0 do bodu z, složenou ze dvou částí, z nichž první je rovnoběžná s reálnou osou, druhá s imaginární osou. Zvolme z_0 pevné, a uvažujme jeho okolí $U(z_0)$ ležící v Ω. Pro z z tohoto okolí, leží $L(z_0, z)$ v Ω, neboť leží dokonce v $U(z_0)$. Tedy můžeme definovat $g(z) = \int_{L(z_0,z)} f(z)\,\mathrm{d}z$. Ukážeme nyní, že $g'(z) = f(z)$ v $U(z_0)$ tedy že $g(z)$ je holomorfní v $U(z_0)$. Platí:

$$\left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{L(z,z+h)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - f(z)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{L(z,z+h)} \big|f(\xi)-f(z)\big|\,\mathrm{d}\xi \leq \frac{2|h|}{|h|}\max_{U_{|h|}(z)} \big|f(\xi)-f(z)\big|;$$

používáme věty (21) a skutečnosti, že délka vhodně zvolené integrační křivky $L(z, z+h)$ je menší než $2|h|$ — viz obrázek (21). Protože $f(z)$ je spojitá, lze $\big|f(\xi) - f(z)\big|$ učinit libovolně malým na vhodně zvoleném okolí bodu z. Potom ale limita integrálu pro $h \to 0$ je nulová, a tedy platí $f(z) = g'(z)$. Holomorfní funkce f má potom podle poznámky za větou (26) i druhou derivaci $f'' \equiv g'$ a funkce g je holomorfní též.

§16. Analytické pokračování holomorfní funkce

Poznámka o jednoznačnosti holomorfních funkcí: Víme již, že pokud známe funkci $f(z)$ v nějaké neprázdné otevřené podmnožině oblasti, známe ji na celé této oblasti — to plyne z věty o jednoznačnosti. Proto lze z dané otevřené množiny holomorfně rozšířit holomorfní funkci do její (pevně zvolené) otevřené nadmnožiny nejvýše jedním způsobem.

Poznámka o prodlužování podél křivky: Nechť γ je křivka v komplexní rovině a $z_k \in \langle\gamma\rangle$ posloupnost bodů na této křivce. Nechť existují (otevřená) okolí $U(z_k)$ těchto bodů taková, že žádná dvě po sobě jdoucí okolí nejsou disjunktní. Funkce f_k, holomorfní na $U(z_k)$, jsou prodloužením funkce f_0 podél křivky γ, pokud se každé dvě z nich po sobě jdoucí rovnají na průniku příslušných okolí.

Poznámka o možné víceznačnosti holomorfních funkcí: Funkci $\sin z$ definovanou na reálné ose lze prodloužit do celého $\mathbb{C}$ a podle věty o jednoznačnosti lze tak učinit právě jedním způsobem. Funkci $\frac{1}{1+z^2}$, definovanou (například) na reálné ose, lze rozšířit do komplexní roviny bez bodů i a $-i$. I toto rozšíření je jednoznačné, i když není do celé komplexní roviny. Ale funkci $\ln z$ definovanou na kladné reálné poloose, nelze rozšít jednoznačně do komplexní roviny. Neboť její rozšíření podél nějaké křivky, která jednou „oběhne“ počátek, se hodnota logaritmu změní o $2\pi i$. To vede ke studiu víceznačných analytických funkcí, o čemž se může čtenář dozvědět více v běžně dostupné odborné literatuře.

§17. Gamma funkce — $\Gamma(z)$

Definice 25: Eulerova gamma funkce
Pro $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re} z > 0$, definujeme funkci

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x \tag{32}$$

a nazýváme ji *gamma funkcí.*

Poznámka o definici gamma funkce: Povšimněme si, že gamma funkce je Melinovou transformací funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Poznámka o korektnosti definice gamma funkce: Zkoumejme, zda integrál v definici gamma funkce konverguje. Vyšetřujme integrovanou funkci zvlášť pro $x \in (0,1)$ a pro $x \in (1,\infty)$. Pro $x \in (0,1)$ platí:

$$|\mathrm{e}^{-x} x^{z-1}| \le |x^{z-1}| = |\mathrm{e}^{(z-1)\ln x}| = \mathrm{e}^{(\operatorname{Re} z - 1)\ln x} = x^{\operatorname{Re} z - 1}.$$

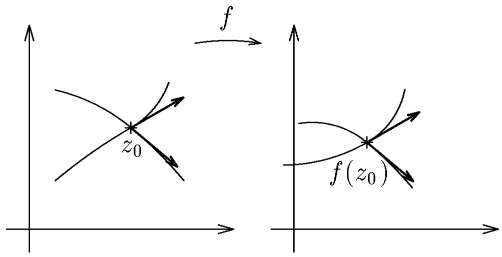
Integrál poslední funkce konverguje na $\langle 0,1\rangle$ právě tehdy, když $\operatorname{Re} z - 1 > -1$, tj. pro $\operatorname{Re} z > 0$. Konvergence integrálu v intervalu $(1,\infty)$ je zaručena členem e^{-x} v integrované funkci.

Věta 46: Základní vlastnosti gamma funkce

1. $\Gamma(z)$ je holomorfní funkce na množině $\Omega = \{z| \ \operatorname{Re} z > 0\}$.
2. Pro každé z z definiční oboru gamma funkce platí $\Gamma(z)z = \Gamma(z+1)$.
3. Jest $\Gamma(1) = 1$ a dále pro každé přirozené číslo n platí $\Gamma(n) = (n-1)!$.
4. Gamma funkci lze holomorfně rozšířit do množiny $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$.
5. Holomorfní rozšíření gamma funkce má v bodech $n \in \{0,-1,-2,\ldots\}$ jednoduché póly násobnosti jedna. Navíc platí $\operatorname{res}_n \Gamma = (-1)^n/(-n)!$.

Důkaz:

1. Podobně jako v poznámce o korektnosti definice gamma funkce, si můžeme rozmyslet, že pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, existuje okolí $U(z)$ takové, že integrované funkce z definice gamma funkce zde mají integrovatelnou majorantu. Ověření ostatních podmínek věty o záměně integrálu a derivace je snadné, a můžeme tedy tuto větu použít pro výpočet derivace gamma funkce. Označme $f(x,w) = \mathrm{e}^{-x} x^{w-1}$, kde $w = u + iv$, podle věty o záměně derivace a integrálu tedy platí:
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial u} \, \mathrm{d}x, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v} \, \mathrm{d}x.$$
Protože Cauchy–Riemannovy podmínky platí pro funkci f jako funkci w, platí i pro gamma funkci. Připomeňme, že postupujeme velmi podobně jako v lemmatu u věty (43).
2. Počítejme hodnotu $\Gamma(z+1)$ nejprve pouze pro $z \in \mathbb{R}^+$ metodou per partes:
$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\xi} \xi^z \, \mathrm{d}\xi = \left[-\mathrm{e}^{\xi} \xi^z\right]_{\xi=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\xi} z \xi^{z-1} \, \mathrm{d}\xi = z\Gamma(z).$$
Na množině $\mathbb{R}^+$, která je podmnožinou definičního oboru gamma funkce a která má hromadný bod v $\mathbb{C}$, tvrzení věty platí. Podle věty o jednoznačnosti holomorfní funkce, pak ale musí v celém souvislém definičním oboru gamma funkce platit: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. Nejprve spočtěme hodnotu gamma funkce v bodě 1:
$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{x} \, \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = 1.$$
Pro ostatní přirozená čísla se požadovaná rovnost dokáže matematickou indukcí za použití druhé části této věty.



Obrázek 22: Konformní zobrazení

4. Definujme pro ta $z \in \mathbb{C}$, která dosud nejsou v definičním oboru gamma funkce, funkční hodnotu v bodě z následovně: $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$. Tento krok případně několikrát zopakujme, např.

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}}, \quad \text{obecně pro } z \in \mathbb{Z}^-,\ \operatorname{Re} a \in (0;1) \quad \Gamma(z+a) = \frac{\Gamma(a)}{(-1+a)(-2+a)\dots(-z+a)}.$$

Takto nelze rozšířit definici gamma funkce pro $z = 0$, neboť v definičním vztahu by ve jmenovateli byla nula, a dále pro všechna záporná celá čísla, neboť gamma funkce není definovaná v nule, a definici proto nemůžeme rozšířit do bodu -1, tudíž ani do bodu -2 atd. Toto rozšíření gamma funkce, tam kde je definováno, je spojité díky druhému tvrzení této věty, a holomorfní, neboť je tvořeno podílem dvou holomorfních funkcí. Toto rozšíření je maximální ve smyslu inkluze, neboť v bodech, kde není definováno je jeho limita nekonečno, rozšířená gamma funkce zde má póly.

5. Nechť n je přirozené číslo nebo nula. Potom v dostatečně malém okolí $U(-n)$ platí $\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1)/\big[z\dots(z+n)\big]$. Počítejme nyní reziduum gamma funkce v bodě $-n$:

$$\operatorname{res}_{-n}\Gamma(z) = \operatorname{res}_{-n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z\dots(z+n)} = \operatorname{res}_0\frac{\Gamma(z+1)}{(z-n)\dots z} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)\dots(-1)}\operatorname{res}_0\frac{1}{z} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

§18. Konformní zobrazení

P o z n á m k a o podobných zobrazeních v rovině: Již dříve jsme vyšetřovali vlastnosti funkce $f(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$. Zjistili jsme, že body komplexní roviny se při zobrazení touto funkcí nejprve otočí o úhel $\arg a$ v kladném směru kolem počátku a poté jsou dilatovány s koeficientem $|a|$. Takovéto zobrazení zachová úhly sevřené přímkami v komplexní rovině. V tomto paragrafu se budeme zabývat zobrazeními, které zachovávají úhly sevřené přímkami (obecně křivkami) a vyslovíme několik zajímavých vět o takových zobrazeních.

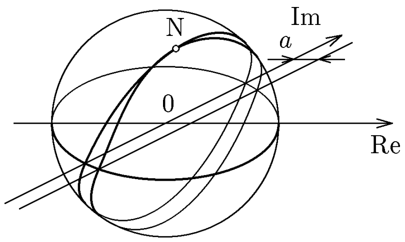
Definice 26: Konformní zobrazení
Řekneme, že funkce $f(z)$ zachovává v bodě z_0 úhly, jestliže je definována na nějakém okolí bodu z_0 a pro každé dvě křivky v komplexní rovině parametrizované funkcemi φ_1 a φ_2 tak, že $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = z_0$ a $\varphi_1'(0), \varphi_2'(0)$ jsou různé od nuly a platí:

$$\left|\arg_{-\pi}\frac{\varphi_1'(t_1)}{\varphi_2'(t_2)}\right| = \left|\arg_{-\pi}\frac{\psi_1'(t_1)}{\psi_2'(t_2)}\right|,$$

kde $\psi_1 = f \circ \varphi_1$ a $\psi_2 = f \circ \varphi_2$. To znamená, že tečné vektory křivek před a po transformaci funkcí $f(z)$ svírají v bodech z_0 a $f(z_0)$ stejný úhel co do velikosti — viz obrázek (22). Říkame též, že funkce $f(z)$ je v bodě z_0 *konformní zobrazení.* Platí-li navíc, že f zachovává orientaci roviny, tj. sevřené úhly se rovnají co do velikosti i co do orientace, nazveme funkci *konformní zobrazení prvního druhu* v bodě z_0, jinak ji nazveme *konformní zobrazení druhého druhu* v bodě z_0.

P o z n á m k a o existenci konformních zobrazení: Konformním zobrazením prvního druhu je funkce $f(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$ z úvodní poznámky tohoto paragrafu. Konformním zobrazením druhého druhu je například funkce $f(z) = \overline{z}$.

P o z n á m k a o existenci holomorfní funkce nezachovávající úhly: Mohlo by se zdát, že každá holomorfní funkce je i konformní. Není tomu tak, jak nás přesvědčí funkce $f(z) = z^2$ v bodě 0. Například úhel sevřený



Obrázek 23: Oblast $\{z|\ \mathrm{Im}\, z \in (0; a)\}$ znázorněná na Riemannově sféře.

přímkami $\varphi_1(t) = t$ a $\varphi_2(t) = it$, kde $t \in \mathbb{R}$, se touto transformací zvětší na dvojnásobný. Přesto však, jak nás přesvědčí následující věta, existuje úzká souvislost mezi holomorfními a konformními zobrazeními.

Věta 47: postačující podmínka pro konformní zobrazení prvního druhu
Nechť $f \in H(\Omega)$, kde Ω je oblast v komplexní rovině, nechť dále pro všechna $z \in \Omega$ je derivace funkce f v bodě z nenulová, tj. $f'(z) \neq 0$. Potom je funkce $f(z)$ ve všech bodech oblasti Ω konformním zobrazením prvního druhu.

Důkaz: Uvažujme dvě křivky φ_1 a φ_2 procházející bodem $z_0 \in \Omega$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = z_0$, tj. křivky procházejí bodem z_0 pro hodnotu parametu 0. Vyšetřujme podíl prvních derivací jejich obrazů při zobrazení funkcí f:

$$\frac{\left(f \circ \varphi_1\right)'(0)}{\left(f \circ \varphi_2\right)'(0)} = \frac{f'[\varphi_1(0)]\varphi_1'(0)}{f'[\varphi_2(0)]\varphi_2'(0)} = \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_2'(0)}$$

Vidíme tedy, že zobrazení je vskutku konformní prvního druhu. Předpoklad o nenulovosti první derivace nelze vynechat, neboť by potom uvažovaný podíl nemusel mít smysl.

P o z n á m k a : Lze ukázat, že pokud má derivace zobrazení f v bodě z_0 kořen násobnosti n, pak křivky procházející bodem z_0 a svírající úhel α transformuje na křivky procházející bodem $f(z_0)$ a svírající úhel $(n+1)\alpha$. Pokud je v z_0 derivace nenulová, je $n = 0$ a úhel se zachovává.

P o z n á m k a o existenci bijektivního konformního zobrazení mezi dvěma oblastmi v komplexní rovině: Je přirozené klást si otázku, jaké jsou nutné a postačující podmínky pro existenci bijektivního konformního zobrazení mezi dvěma oblastmi v komplexní rovině. Ukazuje se, že takové zobrazení existuje vždy pro určitý typ oblastí, např. jednoduše souvislé oblasti (viz další paragraf). Bohužel nemáme možnost formulovat všechny věty o existenci konformních zobrazení, ačkoliv konformní zobrazení mají rozsáhlé fyzikální uplatnění.

§19. Globální Cauchyova věta

Definice 27: Jednoduše souvislá oblast
Řekneme, že oblast Ω komplexní roviny je jednoduše souvislá, pokud $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ je souvislá.

P o z n á m k a o zahrnutí nekonečna do komplexní roviny v předchozí definici: Typickým příkladem množiny, která není jendoduše souvislá je libovolné otevřené redukované okolí nějakého bodu v komplexní rovině. Tím, že je oblast jednoduše souvislá, říkáme, že „nemá díry“. Kdybychom nekonečno v předchozí definici nezařadili do komplexní roviny, potom by např. oblast tvořená těmi komplexními čísly, jejichž imaginární část leží v intervalu $(0, 2\pi)$, nebyla jednoduše souvislá — viz obrázek (23), ale oblast $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ by jednoduše souvislá byla, což by odporovalo našemu záměru definovat pojem oblasti „bez děr“.

P o z n á m k a o alternativní definici jednoduše souvislé oblasti: Alternativně lze jednoduše souvislou oblast definovat tak, že každá uzavřenou křivku ležící v této oblasti lze spojitě zdeformovat do bodu. Tuto ekvivalenci zde nebudeme dokazovat. Povšimněme si, že intuivní význam jednoduché souvislosti jako souvislosti bez děr je v této definici zřejmější.

P o z n á m k a o vícenásobné souvislosti: Lze též definovat, že oblast je n-násobně souvislá a to tak, že její doplněk v $\mathbb{C}^*$ tvoří právě n komponent souvislosti (n souvislých množin).

P o z n á m k a o integrálu holomorfní funkce po uzavřené křivce v jednoduše souvislé oblasti: Integrál holomorfní funkce po uzavřené křivce v jednoduše souvislé oblasti O je nulový. To plyne z reziduové věty, neboť je integrované funkce uvnitř oblasti uzavřené křivkou všude holomorfní, a tudíž zde má nulové reziduum. Kdyby funkce v některém bodě uvnitř křivky nebyla holomorfní, potom by tento bod nutně nepatřil do O, ležel by v jejím doplňku. Zároveň je ale uvnitř křivky, která celá leží O, z čehož plyne, že doplněk O nemůže být souvislý.

Ú m l u v a : Zobrazení, které je bijektivní, holomorfní a jehož inverzní zobrazení je též holomorfní, budeme nazývat krátce *biholomorfní*.

Věta 48: Riemannova

1. Nechť $\Omega \neq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast v komplexní rovině a $U_1(0)$ je jednotkový kruh okolo nuly. Potom existuje biholomorfní zobrazení $\varphi : \Omega \to U_1(0)$.
2. Neexistuje biholomorfní zobrazení $\varphi : \mathbb{C} \to U(0)$.

Důkaz: Nebudeme provádět. Poznamenejme však, že druhá část věty je přímým důsledkem Liouvilleovy věty.

Definice 28: Index bodu
Nechť $a \in \mathbb{C}$ a γ je uzavřená cesta v komplexní rovině. Pro a neležící na cestě γ definujeme *index bodu a* vzhledem ke γ následujícím předpisem

$$\operatorname{Ind}_\gamma a = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

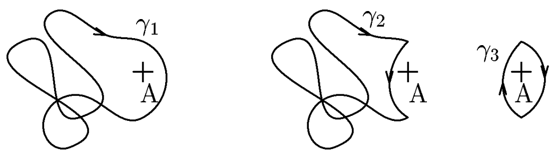
P o z n á m k a o významu indexu bodu: Již víme, že v jistém smyslu lze považovat funkci $\ln(z-a) = \ln|z-a| + i\arg(z-a)$ za primitivní funkci k funkci $1/(z-a)$. V jistém smyslu, tím myslíme, že při integraci podél cesty γ v definici, je potřeba uvážit možné přechody mezi jednotlivými větvemi jednoznačnosti této primitivní funkci. A právě tyto přechody, jak brzy uvidíme, nám poskytnou nádhernou geometrickou interpretaci indexu bodu vzhledem ke γ — index bodu je roven počtu oběhů cesty γ kolem bodu a. To nás však příliš nepřekvapí, neboť si stačí uvědomit, že výše zmíněná primitivní funkce je holomorfní v komplexní rovině bez polopřímky z bodu a, při každém překročení této polopřímky se v závislosti na směru přechodu zvětší nebo zmenší její hodnota o $2\pi i$; to je ale také jediný „zdroj nenulovosti" integrálu pro výpočet indexu. Tím lze intuitivně vysvětlit geometrický význam indexu bodu k cestě γ. Základní vlastnosti indexu bodu k cestě shrnuje následující věta.

Věta 49: Vlastnosti indexu bodu vzhledem ke křivce
Nechť γ je uzavřená cesta v komplexní rovině. Potom platí:

1. Pro každý bod v komplexní rovině, který neleží na cestě γ, je jeho index vůči γ definován a je roven celému číslu.
2. Funkce $\operatorname{Ind}_\gamma z$ jako funkce z je konstantní na každé komponentě souvislosti $\mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$.
3. Existuje neomezená komponenta souvislosti $\mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$ v komplexní rovině taková, že index všech jejích bodů vzhledem k cestě γ je roven nule.

Důkaz:

1. Uvažujme uzavřenou cestu $\gamma : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbb{C}$. Definujme $\psi(t) = \int_\alpha^t \gamma'(\tau)/\big[\gamma(\tau) - a\big]\,\mathrm{d}\tau$. Chceme ukázat, že platí
$$\psi(\beta) - \psi(\alpha) = \int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{\gamma(\tau) - a}\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathbb{Z}.$$



Obrázek 24: Trik při výpočtu indexu bodu. $\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3$, a proto $\mathrm{Ind}_{\gamma_1} a = \mathrm{Ind}_{\gamma_2} a + \mathrm{Ind}_{\gamma_3} a$.

Označme $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)}$. Potom $\varphi'(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)}\psi'(t) = \varphi(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$. Nyní ukážeme, že podíl $\varphi(t)/\big(\gamma(t) - a\big)$ je jako funkce t konstantní. Vyšetřeme tedy první derivaci tohoto podílu

$$\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-a}\right)' = \frac{\varphi'(t)\big(\gamma(t)-a\big) - \varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-a\big)^2} = \varphi(t)\frac{\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\big(\gamma(t)-a\big) - \gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-a\big)^2} = 0.$$

Tedy existuje konstanta $K \in \mathbb{C}$, že pro všechny t přes které se integruje platí $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)} = K\big(\gamma(t) - a\big)$. Speciálně tedy platí $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, tj. $\mathrm{e}^{\psi(\alpha)} = \mathrm{e}^{\psi(\beta)}$. Existuje takové $k \in \mathbb{Z}$, že platí $\psi(\beta) = \psi(\alpha) + 2k\pi i$. Potom ale je index bodu a k cestě γ roven právě tomuto k.

2. Podobně jako již několikrát dříve, si můžeme rozmyslet za pomoci věty o spojité závislosti integrálu na parametru, že index bodu k cestě je spojitá funkce proměnné z. Nechť v nějaké komponentě souvislosti není index vzhledem k cestě konstantní, tj. existují z_1 a z_2 body této komponenty, že platí $\mathrm{Ind}_\gamma z_1 \neq \mathrm{Ind}_\gamma z_2$. Protože tyto dva body leží ve stejné komponentě souvislosti, lze je spojit křivkou. Funkce indexu bodu k cestě je na této křivce spojitá, a proto zde nabývá, podle Darbouxovy vlatnosti, všech hodnot mezi $\mathrm{Ind}_\gamma z_1$ a $\mathrm{Ind}_\gamma z_2$ — vzhledem k tomu, že tyto hodnoty jsou různé, nabývá i neceločíslených hodnot, což ovšemže není možné, neboť by jinak neplatilo tvrzení první části věty.
3. Vzhledem k tomu, že cesta γ je souvislá, je nutně omezená. Existuje tedy $R > 0$, že vně kruhu $U_R(0)$ neleží žádný bod cesty γ. Pro bod $a = R$, existuje na kruhu $U_R(0)$ primitivní jednoznačná funkce k funkci $\frac{1}{z-R}$ a to funkce $\ln_0(z - R)$. Potom ovšemže index bodu R k cestě γ je nulový a dle druhé části věty, jsou nulové indexy všech bodů v této komponentě souvislosti. Neomezené komponenta pak existuje právě jedna, což plyne plyne z toho, že tato komponenta obsahuje celý doplněk kruhu $U_R(0)$.

Poznámka o výpočtu indexu bodu: Index bodu, jak je vidět z definice, je aditivní funkcí cest. Proto platí

$$\mathrm{Ind}_{\Sigma\varphi_i} a = \sum \mathrm{Ind}_{\varphi_i} a.$$

Toho lze využít při výpočtu indexu bodu a vzhledem k cestě γ tak, že zavedeme nějakou dodatečnou cestu, která např. opačně probíhá část γ — při samotném výpočtu se vypočte index vzhledem k takto upravené cestě a vzhledem k dodané cestě (obr. 24). Výsledný index je součtem spočtených indexů.

Poznámka o indexu bodu vzhledem k cestě uvnitř jednoduše souvislé oblasti: Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast, nechť γ je cesta v této oblasti. Potom index každého bodu neležícího v oblasti Ω je vzhledem k cestě γ nulový, neboť každý takový bod a patří do jediné neomezené komponenty souvislosti doplňku obrazu cesty γ v komplexní rovině. Podle třetí části předchozí věty je index takového bodu vzhledem k cestě γ nulový.

Poznámka o jednoduché souvislosti konvexní oblasti: Každá konvexní oblast je jednoduše souvislá. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by bod $a \notin \Omega$ takový, že ho nelze spojit křivkou s nekonečnem. Speciálně každá polopřímka z bodu a do nekonečna obsahuje bod z množiny Ω. Tuto vlastnost mají dvě libovolné opačně orientované polopřímky — označme b a c tyto body z Ω. Potom ale lze bod a vyjádřit jako lineární kombinaci bodu b a c a tedy musí být prvkem množiny Ω, neboť tato množina je konvexní.

Věta 50: Globální Cauchyova a reziduová věta

Nechť Ω je oblast v komplexní rovině, nechť $\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$ je součet uzavřených cest a nechť $\operatorname{Ind}_\Gamma a = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\gamma_i} a = 0$, pro všechna $a \notin \Omega$. Potom platí

1. **Cauchyova věta**
   Pro každou holomorfní funkcí f v oblasti Ω platí
   $$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$
2. **Cauchyova integrální formule**
   Pro každou holomorfní funkci f v oblasti Ω a každý bod $w \in \Omega$, který neleží na žádné z cest γ_i, platí
   $$f(w)\operatorname{Ind}_\Gamma w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z.$$
3. **Reziduová věta**
   Nechť f holomorfní funkce v oblasti $\Omega \setminus A$, kde A je konečná množina a nechť žádná z cest γ_i neprochází žádným bodem z množiny A. Platí
   $$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{a\in A} \operatorname{res}_a f \operatorname{Ind}_\Gamma a.$$

Poznámka: Je-li oblast Ω jednoduše souvislá, potom je $\operatorname{Ind}_\Gamma a = 0$ pro všechna $a \notin \Omega$. Tedy v jednoduše souvislých oblastech platí věta pro libovolné uzavřené cesty. Pro obecnou oblast Ω pak věta platí jen pro některé uzavřené cesty γ splňující tento předpoklad.

Důkaz: Nejprve dokážeme druhou část věty. Zvolme w pevně. Označme $g(z,w) = \big[f(z) - f(w)\big]/(z-w)$ pro $z \neq w$ a $g(z,w) = f'(z)$ pro $z = w$. Funkce g je spojitá na $\Omega \times \Omega$. Označme $h(w) = \int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}z$. Funkce $h(w)$ je spojitá, neboť obraz cesty Γ je uzavřená množina, a tedy funkce $|g|$ je na množině $\langle\Gamma\rangle \times \langle w-\varepsilon, w+\varepsilon\rangle$ spojitá a nabývá zde maxima. Toto maximum je integrovatelnou majorantou funkce $g(z,w)$, a tudíž je funkce $h(w)$ spojitá.

Nyní zvolme O libolný obdélník v oblasti Ω. Vyšetřeme integrál funkce $h(w)$ po jeho hranici:
$$\int_{\partial O} h(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\partial O}\int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma\int_{\partial O} g(z,w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma 0\,\mathrm{d}z = 0.$$
Fubiniho větu pro záměnu integrálů lze použít, jak čtenář jistě snadno ověří. Integrál z funkce $g(z,w)$ pro z pevné po hranici obdélníka O je nulová, neboť $g(z,w)$ je holomorfní funkce proměnné w. Podle Morerovy věty je tedy funkce $h(w)$ holomorfní v oblasti Ω.

Nyní definujme $h_1(w) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z$ v oblasti Ω_1, kterou tvoří ty body komplexní roviny, jejichž indexy vzhledem Γ je nulový. Oblast Ω_1 je dle předpokladů věty nadmnožinou $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Funkce h_1 je rovna h na průniku Ω a Ω_1, neboť na tomto průniku platí:
$$h(w) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma w f(w) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = h_1(w).$$
Funkce $H(w)$, definovaná předpisem $H(w) = h(w)$ pro $w \in \Omega$ a $H(w) = h_1(w)$ pro $w \in \Omega_1$ je tedy dobře definovaná holomorfní funkce na celém $\mathbb{C}$. Navíc $\lim\limits_{|w|\to\infty} H(w) = \int_\Gamma \lim\limits_{|w|\to\infty} \frac{f(z)}{z-w} = 0$. Tedy $H(w)$ je omezená na celém $\mathbb{C}$ a tedy podle Liovielleovy věty je tato funkce konstantní, a tedy identicky rovna nule. Tedy pro libovolné $w \in \Omega$ a $w \notin \langle\Gamma\rangle$ platí:
$$0 = H(w) = h(w) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - f(w)2\pi i \mathrm{Ind}_\Gamma w$$
.

Nyní dokážeme první část věty. Zvolme libovolný bod $w \in \Omega$, který neleží na žádné z cest γ_i. Označme $g(z) = f(z)(z-w)$. Podle již dokázané druhé části věty platí

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{g(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 2\pi i g(w)\mathrm{Ind}_\Gamma w = 0.$$

Zbývá již dokázat jen třetí část věty. Označme $L_a(z)$ hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z)$ v bodě $a \in A$. Označme $g(z) = f(z) - \sum_{a\in A} L_a(z)$. Funkce $g(z)$ je holomorfní v oblasti Ω. Tedy platí

$$0 = \int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma \sum_{a\in A} L_a(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{a\in A}\int_\Gamma L_a(z)\,\mathrm{d}z.$$

Nyní spočtěme každý z integrálů $\int_\Gamma L_a(z)\,\mathrm{d}z$. Ale $L_a(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$, potom ale $\int_\Gamma L_a(z) = c_{-1}\mathrm{Ind}_\Gamma a$, jak již bylo dříve několikrát diskutováno. Protože ale $L_a(z)$ je pro $z \neq a$ holomorfní, platí, že $\mathrm{res}_a f = \mathrm{res}_a L_a$, a tedy platí i $\int_\Gamma L_a(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{res}_a\, L_a \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i\,\mathrm{res}_a\, f\,\mathrm{Ind}_\Gamma\, a$.

14 Fourierova transformace

§1. Základní pojmy: Fourierova transformace na $\mathscr{L}_1$

Definice 29: Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace
Uvažujme standardní skalární součin na $\mathbb{R}_n$, tj. $\forall \lambda, x \in \mathbb{R}_n$ definujme $(\lambda, x) \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i$. Nechť $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}_n)$, pak definujme *Fourierovu transformaci* $\hat{f}$ funkce f jako funkci $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} = \widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \exp\big(-2\pi i(x,\lambda)\big)\,\mathrm{d}x$ a *inverzní Fourierovu transformaci* jako funkci $\mathcal{F}_{-1}(\widehat{f}) = \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \widehat{f}(\lambda) \exp\big(2\pi i(\lambda,x)\big)\,\mathrm{d}\lambda$.

P o z n á m k a : Čtenář se muže setkat i s jinými definicemi Fourierova obrazu. Alternativně se Fourierovy transformace definují např. vynásobením faktorem $1/(2\pi)^{n/2}$. Viz Kopáčkova skripta.

C v i č e n í : Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $\chi_{(-1/2,1/2)}$, charakteristické funkce intervalu $(-1/2;1/2)$. Vyjde $\hat{f}(\lambda) = (\sin \pi\lambda)/(\pi\lambda)$. Tento obraz, jak víme z minulého semestru, není z $\mathscr{L}_1(\mathbb{R})$.

P ř í k l a d : Spočtěme Fourierův obraz funkce $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ známé ve fyzice např. jako funkce charakterizující Gaussovo normální rozdělení. Vzpomeňme si, že pomocí věty o substituci jsme obdrželi, že $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda x^2) = (\pi/\lambda)^{1/2}$. Zkuste provést výpočet tohoto integrálu pomocí reziduové věty. Spočtěme

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i\lambda x - \pi x^2) = \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-\pi(x+i\lambda)^2\big)\exp(-\pi\lambda^2) = \exp(-\pi\lambda^2)\int_{\mathbb{R}} \exp\big(-\pi(x+i\lambda^2\big)\,\mathrm{d}x.$$

Položme $t = x + i\lambda$,

$$\widehat{f}(\lambda) = \exp(-\pi\lambda^2)\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi t^2)\,\mathrm{d}t = \exp(-\pi\lambda^2).$$

Definice 30: Konvoluce
Nechť $f, g \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}_n)$. Pak definujme konvoluci $f * g$ vztahem

$$(f*g)(x) \overset{\text{df}}{=} \int_{\mathbb{R}_n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

P o z n á m k a : Na konvoluci jsme již narazili při počítání Fourierových řad v paragrafu o bodové konvergenci.

Věta 51: Symetrie konvoluce
Nechť $f, g \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}_n)$. Pak $f * g = g * f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}_n)$.

Důkaz: Podle Fubiniho věty

$$\|f*g\|_{\mathscr{L}_1} = \int_{\mathbb{R}_n}\left|\int_{\mathbb{R}_n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}_n}\left(\int_{\mathbb{R}_n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\right)g(y)\,\mathrm{d}y \le \int_{\mathbb{R}_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}_n} |g(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Poslední výraz je součin $\mathscr{L}_1$-norem funkcí f a g, tedy $f * g$ existuje pro skoro všechna x a je z $\mathscr{L}_1$. Substituce $z = x - y$, jejíž jakobián je v absolutní hodnotě jednotka, pak vede k

$$\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z.$$

Věta 52: Základní vlastnosti Fourierovy transformace na $\mathbb{R}_n$

1. $\widehat{f}$ je spojitá, $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}_n} |\widehat{f}(\lambda)| \le \|f\|_{\mathscr{L}_1} < \infty$.
2. $\lim_{|\lambda|\to\infty} \widehat{f}(\lambda) = 0$ (Riemann–Lebesgue).
3. $\widehat{f*g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$.
4. Označme $f_a(x) = f(x+a)$. Pak $\widehat{f}_a(\lambda) = e^{2\pi i(a,\lambda)}\widehat{f}(\lambda)$.

5. Označme $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$. Pak $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{|\alpha|^n}\widehat{f}(\lambda/\alpha)$.

Důkaz:

1. Podle trojúhelníkové nerovnosti
$$\left|\widehat{f}(\lambda)\right| \le \int \left|f(x)e^{2\pi i(x,\lambda)}\right| \mathrm{d}x = \int |f(x)| \,.\, 1 \,\mathrm{d}x = \|f\|_{\mathscr{L}_1}\,.$$
Nalezli jsme integrovatelnou majorantu nezávisející na λ, integrand je v λ spojitý a v x měřitelný, můžeme se tedy odvolat na větu o spojité závislosti na parametru z teorie Lebesgueova integrálu, z níž plyne spojitost $\widehat{f}$.
2. Později.
3. Vyjdeme z definice a použijeme substituci $z = x - y$:
$$\int e^{-2\pi i(x,\lambda)}\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int e^{-2\pi i(\lambda,y+z)} f(z)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$
$$= \int e^{-2\pi i(y,\lambda)}g(y)\,\mathrm{d}y \int e^{-2\pi i(z,\lambda)} f(z)\,\mathrm{d}z$$
4. Použijeme substituci $y = x + a$:
$$\int f(x+a)e^{-2\pi i(\lambda,x)}\,\mathrm{d}x = \int f(y)e^{-2\pi i(\lambda,y)+2\pi i(\lambda,a)}\,\mathrm{d}y = e^{2\pi i(a,\lambda)}\widehat{f}(\lambda).$$
5. Tentokrát uspějeme se substitucí $y = \alpha x$:
$$\int f(\alpha x)e^{2\pi i(\lambda,x)}\,\mathrm{d}x = \int f(y)e^{2\pi i(\lambda,\frac{y}{\alpha})}\frac{1}{|\alpha|^n}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|\alpha|^n}\widehat{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

Příklad: Víme, že $\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2}) = e^{-\pi|\lambda|^2}$. Takto $\mathcal{F}(e^{-\pi\alpha|x|^2}) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^n}}e^{-\pi|\lambda/\alpha|^2}$

Poznámka: Konvoluce je vhodnou operací pro zavedení struktury algebry na $\mathscr{L}_1$, viz bod 3. Podotkněme, že vůči obyčejnému násobení není $\mathscr{L}_1$ uzavřený, například do $\mathscr{L}_1(-1,1)$ náleží funkce $1/\sqrt[3]{x^2}$, ale ne už její druhá mocnina.

Poznámka: Z bodu 4 lze odvodit chování Fourierovy transformace vůči derivaci.

§2. Schwartzův prostor rychle klesajících hladkých funkcí — $\mathscr{S}$

Poznámka: Chceme studovat Fourierovu transformaci na nějakém vhodnějším prostoru funkcí než $\mathscr{L}_1$.

Označení: V dalším budeme používat zápisu mocnin a derivací pomocí multiindexů tvaru $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. Je-li $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}_n$, pak symbolem x^α rozumíme součin $x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n}$. Podobně $D^\alpha f$ značí $\partial^{|\alpha|}f/(\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n})$.

Definice 31: Schwartzův prostor
Prostor $\mathscr{S}$ nekonečně diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}_n$, pro něž $\forall\alpha,\beta$ je $\|f\|_{\alpha,\beta} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{\mathbb{R}_n}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| < \infty$ nazýváme *Schwartzovým prostorem.*

Poznámka: $\mathscr{S}$ je vektorový prostor nekonečné dimenze a pro konkrétní multiindexy α,β je $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ pseudonorma na něm (tj. mohou existovat nenulové vektory s nulovou (pseudo)normou). Spočetný systém pseudonorem zavádí na tomto prostoru topologii ve smyslu následující definice.

Definice 32: Konvergence v $\mathscr{S}$
Nechť $\{f_n\}_1^\infty \in \mathscr{S}$, $f \in \mathscr{S}$. Pak $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} f$, právě když $\forall\alpha,\beta$ multiindexy $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \to 0$.

Poznámka: Podmínku v definici Schwartzova prostoru $\mathscr{S}$ lze ekvivalentně nahradit požadavkem $(\forall N \in \mathbb{N}_0)(\forall \beta)\big(\, \|f\|_{N,\beta} = \sup_{\mathbb{R}_n}(1+|x|^2)^N |D^\beta f| < \infty\big)$. Čtenář snadno ověří, že pro každou mocninu $|x^\alpha|$ můžeme pro dostatečně velká $|x|$ majorizovat i minorizovat výrazem $(1+|x|^2)^N = (1+\sum x_i^2)^N$ s vhodným N.

Poznámka: Prostor $\mathscr{D}(\mathbb{R}_n)$ nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem je podprostorem $\mathscr{S}(\mathbb{R}_n)$, protože funkce s kompaktním nosičem jsou mimo tento nosič identicky nulové.

Věta 53: Základní vlastnosti $\mathscr{S}$

1. $(\forall p \geq 1)(\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_p)$.
2. $\mathscr{S}$ je uzavřený vzhledem k násobení polynomem a derivaci a $\forall f \in \mathscr{S}$ platí

$$\mathcal{F}\left[D^\alpha f(x)\right](\lambda) = (2\pi i \lambda)^\alpha \widehat{f}(\lambda) \qquad \mathcal{F}\left[(-2\pi i x)^\alpha f(x)\right](\lambda) = D^\alpha \widehat{f}(\lambda)$$

3. $\mathscr{S}$ je algebra vzhledem k násobení i konvoluci.
4. $\mathcal{F}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}, \mathcal{F}_{-1}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}$

Důkaz:

1. Podle ekvivalentní podmínky pro náležení do $\mathscr{S}$ lze pro každé N najít konstantu $K(N)$, že $|f| \leq \frac{K(N)}{(1+|x|^2)^N}$. Chceme ukázat, že $\|f\|_{\mathscr{L}_p} = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$. K tomu nám bude stačit, že funkce $1/(1+|x|^2)^{Np}$ je pro nějaké N integrovatelná, protože je po vynásobení konstantou majorantou funkce $|f|^p$. Provedeme-li substituci do sférických souřadnic v n dimenzích a vyintegrujeme-li přes úhlové proměnné, na nichž $1/(1+\rho^2)^{Np}$ nezávisí, převedeme tím úlohu na vyšetřování konvergence jednorozměrného integrálu $\int \rho^{n-1}/(1+\rho^2)^{Np}\,\mathrm{d}\rho$. Ten konverguje, právě když $n-1-2Np < -1$, jinými slovy $Np > \frac{n}{2}$, čili ke každým p a n najdeme vhodné N a s ním svázanou majorantu.
2. Uzavřenost vůči derivaci a násobení polynomem je zřejmá z definice. První vzorec dokážeme integrací per partes s využitím toho, že f i veškeré její derivace se v nekonečnu blíží nule:

$$\int_{\mathbb{R}_n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i (x,\lambda)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}_n} f(x)(-2\pi i \lambda_j) e^{-2\pi i (x,\lambda)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \lambda_j \widehat{f}(\lambda).$$

   Druhý vzorec je ještě jednodušší:

$$\int (-2\pi i x_j) f(x) e^{2\pi i (x,\lambda)}\,\mathrm{d}x = \int f(x) \frac{\partial}{\partial \lambda_j}\left(e^{-2\pi i (x,\lambda)}\right)\mathrm{d}x = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \lambda_j}(\lambda).$$

3. Pokud f a g náleží $\mathscr{S}$, jsou z C^∞, tedy i jejich součin. Vnitřek absolutní hodnoty ve výrazu $\sup |x^\alpha D^\beta(fg)|$ bude po rozepsání pomocí Leibnizova pravidla obsahovat součet členů tvaru $Kx^\alpha (D^{\beta_1} f)(D^{\beta_2} g)$, které mají podle definice $\mathscr{S}$ konečné supremum.

   Pokud $f, g \in \S$, pak mají integrovatelnou majorantu tvaru $1/(1+|x|^2)^N$. Položme x pevné, pak na nějakém jeho okolí můžeme odhadovat $\big(f * g\big)(x)$ vztahy

$$\big(f * g\big)(x) = \int_{|y|<R} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|y|\geq R} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \leq$$
$$\leq I(R) + \int_{|y|\geq R} \frac{K}{(1+|x-y|^2)^N} \frac{L}{1+|y|^2}\,\mathrm{d}y \leq I(R) + C\int_{\rho \geq R} \frac{1}{\rho^{2N+2M}} \rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho,$$

   kde R je zvoleno tak, aby na zvoleném okolí platila poslední nerovnost. Pro $N+M > \frac{n}{2}$ poslední integrál konverguje a majoranta je tím nalezena. Supremovou podmínku pro $\left|x^\alpha D^\beta \big(f * g\big)(x)\right|$ můžeme redukovat na problém omezenosti $\left|\big(f * g\big)(x)\right|$ samotné, neboť

$$\left| x_j \frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)\right| = \left|\int x_j \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq$$

$$\le \left| \int \left[(x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial(x_i - y_i)} f(x-y) \right] [g(y)] \, \mathrm{d}y \right| + \left| \int \left[\frac{\partial}{\partial(x_i - y_i)} f(x-y) \right] [y_j g(y)] \, \mathrm{d}y \right|,$$

kde v hranatých závorkách jsou podle bodu 2 funkce z $\mathscr{S}$ a integrály jsou jejich konvoluce. Pokud označíme M_f maximum funkce f na celém $\mathbb{R}_n$, můžeme psát

$$|f * g| = \left| \int f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y \right| \le M_f \left| \int g(y) \, \mathrm{d}y \right| \le M_f \int |g(y)| \, \mathrm{d}y < \infty$$

Zde jsme využili trojúhelníkové nerovnosti a bodu 1.

4. Abychom ukázali nekonečnou spojitou diferencovatelnost, potřebujeme pouze zaměnit pořadí derivace a integrálu, což se nám díky existenci integrovatelné majoranty (například $1/(1+|x|^2)^N$) podaří. Dále chceme dokázat, že pro f z $\mathscr{S}$ je $(\forall \alpha, \beta)(\exists K)\big(\big|\lambda^\alpha D^\beta \mathcal{F}\big[f(x)\big](\lambda)\big| < K\big)$. Z bodu 2 plyne
$$(2\pi i \lambda)^\alpha D^\beta \mathcal{F}\big[f(x)\big](\lambda) = \mathcal{F}\big[D^\alpha (-2\pi i x)^\beta f(x)\big](\lambda) = \mathcal{F}\big[g(x)\big](\lambda) = \widehat{g}(\lambda),$$
přičemž $g(x) \in \mathscr{S}$ vzhledem k uzavřenosti $\mathscr{S}$ k násobení polynomem a derivaci. Užitím trojúhelníkové nerovnosti
$$\big|\widehat{g}(\lambda)\big| = \left| \int g(x) e^{-2\pi i (x,\lambda)} \right| \mathrm{d}x \le \int \big|g(x)\big| \, \mathrm{d}x = \|g\|_{\mathscr{L}_1}$$
a bodu 1, podle nějž $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_1$, plyne žádaný výsledek. Obdobně se důkaz provede pro $\mathcal{F}_{-1}$.

Věta 54: L. Schwartz
Fourierova transformace $\mathcal{F}$ zobrazuje prostě prostor $\mathscr{S}$ na sebe a transformace $\mathcal{F}_{-1}$ je k ní inverzní.

Poznámka: Než provedeme důkaz, je dobré si uvědomit, v čem je hlavní potíž a jak se nám ji podaří obejít. Přímým použitím definic $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}_{-1}$ dostaneme

$$\mathcal{F}_{-1}\big[\mathcal{F}(f)\big](x) = \int \int e^{2\pi i (\lambda, x)} e^{-2\pi i (y,\lambda)} f(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\lambda. \tag{33}$$

Tato funkce (jako funkce dvou proměnných y, λ) není integrovatelná (její absolutní hodnota nezávisí na λ). A tak nelze používat Fubiniovu větu a přehazovat pořadí integrace a dělat vhodné substituce.

Náš postup tedy bude jiný. Nejdříve dokážeme větu pro zcela speciální třídu funkcí u_t, pro které je jejich Fourierův obraz znám. Pak z nich uděláme „superpozice“, t.j. konvoluce s funkcemi $f \in \mathscr{S}$ a ukážeme, že i pro tyto konvoluce věta platí. Tím budeme mít dokázánu větu pro dost širokou třídu funkcí a limitním přechodem dostaneme tvrzení věty pro všechny funkce.

Funkce u_t je vhodné (tzv. fundamentální) řešení rovnice pro vedení tepla. Souvislost Fourierovy transformace s rovnicí pro vedení tepla není náhodná, velký Fourierův spis se jmenoval 'Analytická teorie řešení rovnice pro vedení tepla'.

Důkaz: Pro jednoduchost důkaz provedeme pro dimenzi $n = 1$. Nechť tedy $f \in \mathscr{S}$. Označme $u_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Nejdřív dokážeme tři pomocná tvrzení:

1. $\mathcal{F}_{-1}\big[\mathcal{F}\big(u_t(x)\big)\big] = u_t(x)$, $t > 0$.
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} u_t * f = f$.
3. $\widehat{u}_t = e^{-\pi^2 4t|\lambda|^2}$, tedy $\forall \lambda$, $\lim\limits_{t \to 0^+} \widehat{u}_t(\lambda) = 1$.

První tvrzení stačí dokázat pro funkci $e^{-\alpha^2|x|^2}, \alpha^2 = 1/4t$ (transformace $\mathcal{F}, \mathcal{F}_{-1}$ jsou lineární a na normalizačním faktoru tedy nezáleží).

Ale podle příkladu za definicí (29) Fourierovu transformaci této funkce známe. Funkce $e^{-\pi|\alpha x|^2}$ se zobrazí na $\alpha^{-1} e^{-\pi|\frac{\lambda}{\alpha}|^2}$ a ta se inverzní transformací $\mathcal{F}_{-1}$ zobrazí na $\alpha^{-1} \alpha e^{-\pi|\alpha x|^2}$.

Druhé tvrzení je složitější. Použijeme-li substituci $y = x - 2\sqrt{t}z$; $\mathrm{d}y = 2\sqrt{t}\,\mathrm{d}z$, dostaneme

$$u_t * f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) \, \mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi t}} \int e^{-|z|^2} f(x - 2\sqrt{t}z) \, \mathrm{d}z.$$

Podle Lebesgueovy věty tedy pro $t \to 0^+$ dostaneme

$$\lim_{t\to 0^+} u_t * f(x) = f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-|z|^2}\,\mathrm{d}z = f(x). \tag{34}$$

Třetí tvrzení je okamžitým důsledkem toho, že známe $\widehat{u}_t$ explicitně.

Teď už je možné dokončit důkaz celé věty. Nechť f je libovolná funkce z $\mathscr{S}$ a $t > 0$. Definujme funkci $g_t \overset{\mathrm{df}}{=} u_t * f$, pak platí $\widehat{g}_t = \widehat{u}_t \cdot \hat{f}$ a použitím Fubiniovy věty [integrovatelná majoranta je rovna $k|f(y)|\widehat{u}_t(\lambda)|$] dostaneme, že funkce $\mathcal{F}_{-1}\big(\mathcal{F}(g_t)\big)(x)$ je rovna

$$\int e^{2\pi i(x,\lambda)}\widehat{u}_t(\lambda)\hat{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int e^{2\pi i(x,\lambda)}\widehat{u}_t(\lambda)\left(\int e^{-2\pi i(\lambda,y)}f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \int f(y)\left(\int e^{2\pi i(\lambda,x-y)}\widehat{u}_t(\lambda)d\lambda\right)\mathrm{d}y = \int f(y)u_t(x-y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= u_t * f(x) = g_t(x).$$

Levá strana této rovnosti konverguje (podle Lebesgueovy věty) pro $t \to 0^+$ k funkci $\int e^{2\pi i(x,\lambda)}\hat{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \mathcal{F}_{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x)$, zatímco pravá strana konverguje k $f(x)$. Tím je dokázáno, že $\mathcal{F}_{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big) = f$ a a z toho se ihned podle definice substitucí $\lambda' = -\lambda$ odvodí rovnost $\mathcal{F}\big(\mathcal{F}_{-1}(f)\big) = f$ pro všechny $f \in \mathscr{S}$.

Tím jsme zároveň dokázali, že $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}_{-1}$ jsou inverzní a zobrazují $\mathscr{S}$ prostě na $\mathscr{S}$.

Poznámka: Na $\mathscr{S}$ je možné také formulovat a jednoduše dokázat vlastnost $\widehat{f\cdot g} = \hat{f} * \hat{g}$, kterou nešlo napsat na $\mathscr{L}_1$. Jako jednoduché cvičení si můžete také ověřit analogie dalších bodů z věty (52) — platí např. $\mathcal{F}\big[e^{2\pi i(\lambda,x)}f(x)\big](\lambda) = \hat{f}(\lambda + a)$.

§3. Fourierova transformace na $\mathscr{L}_2$.

Věta 55: O hustotě

Označme $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem (t.j. pro $f \in \mathscr{D}$ předpokládáme, že existuje dostatečně velká koule $K \subset \mathbb{R}^n$ taková, že f je nula vně této koule). Připomeňme, že prostor $\mathscr{L}_p$ je prostor (tříd ekvivalence) všech funkcí f, pro které je číslo

$$||f||_{\mathscr{L}_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} < \infty.$$

Pak pro každé $p \geq 1$ platí

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$$

a prostor $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ je hustý v $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz: Ideu důkazu ukážeme v případě $p = 1$. Nechť $f \in \mathscr{L}_1$ je pevně zvolena. Pro dané kladné ε chceme najít funkci $g \in \mathscr{D}$ takovou, aby $||g - f||_{\mathscr{L}_1} < \varepsilon$. Podle definice lze napsat f jako rozdíl $f = f_1 - f_2$ tak, že obě funkce patří do L^+, stačí tedy aproximovat s libovolnou přesností každý ze sčítanců.

Buď tedy f libovolná funkce z L^+. Pro ni podle definice Lebesgueova integrálu existuje jednoduchá funkce h, tak, že $||h - f||_{\mathscr{L}_1} < \varepsilon$. Jednoduché funkce jsou lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů. Každou charakteristickou funkci intervalu ale lze s libovolnou přesností (v normě prostoru $\mathscr{L}_1$) přiblížit funkcí z prostoru $\mathscr{D}$. Toto tvrzení je velmi názorné v $\mathbb{R}^1$ — stačí u charakteristické funkce "zhladit" skok v krajních bodech intervalu, změnit charakteristickou funkci jen na množině malé míry; v $\mathbb{R}^n$ stačí totéž udělat v každé proměnné. Z toho už pak plyne celé tvrzení.

Poznámka: Dá se dokázat, že pro funkci f, která patří současně do $\mathscr{L}_1$ i $\mathscr{L}_2$, lze najít posloupnost $f_n \in \mathscr{D}$, která konverguje k f i v prostoru $\mathscr{L}_1$, i v prostoru $\mathscr{L}_2$. To se nám bude za chvíli hodit.

Důkaz Riemann–Lebesgueova lemmatu: Je-li funkce f z prostoru $\mathscr{S}$, pak víme, že i její obraz tam patří a R.–L. lemma tedy pro f platí (z vlastností prostoru $\mathscr{S}$).

Nechť tedy $f \in \mathscr{L}_1$ a nechť ε je dané kladné číslo. Pak existuje funkce $g \in \mathscr{S}, ||f - g||_{\mathscr{L}_1} < \varepsilon$. Pak tedy také pro všechna λ platí $|\hat{f}(\lambda) - \hat{g}(\lambda)| \leq ||f - g||_{\mathscr{L}_1} < \varepsilon$. Dále existuje K tak velké, že $\forall\lambda,\ |\lambda| > K$ platí $|\hat{g}(\lambda)| < \varepsilon$. Dohromady, $\forall\lambda,\ |\lambda| > K$ platí

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq |\hat{f}(\lambda) - \hat{g}(\lambda)| + |\hat{g}(\lambda)| < 2\varepsilon.$$

Věta 56: Parseval
Pro libovolné $f, g \in \mathscr{S}$ platí
$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}).$$

P o z n á m k a : Fourierova transformace tedy zachovává skalární součin (je to tzv. isometrie). Tato vlastnost pak umožní snadno rozšířit definici Fourierovy transformace na celé $\mathscr{L}_2$.

Důkaz:
$$\int f\overline{g} = \int f(x) \left(\overline{\int e^{2\pi i(x,\lambda)} \hat{g} d\lambda} \right) \mathrm{d}x = \int \overline{\hat{g}}(\lambda) \left(\int f(x) e^{-2\pi i(x,\lambda)} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\lambda = \int \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{g}(\lambda)} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Definice 33: Fourierova transformace v $\mathscr{L}_2$.
Nechť $f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Podle věty o hustotě existuje posloupnost funkcí $f_n \in \mathscr{S}$ taková, že $||f_n - f||_{\mathscr{L}_2} \to 0$. Pak také posloupnost $\hat{f}_n$ je Cauchyovská v prostoru $\mathscr{L}_2$. Existuje tedy element, který označíme $\hat{f} = \mathcal{F}(f) \in \mathscr{L}_2$, který je limitou posloupnosti $\hat{f}_n$ v prostoru $\mathscr{L}_2$.

Stejně se definuje také transformace $\mathcal{F}_{-1}$.

Věta 57: Vlastnosti Fourierovy transformace na $\mathscr{L}_2$.

1. Prvek $\hat{f}, f \in \mathscr{L}_2$ nezávisí na výběru přiblížení. Transformace $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}_{-1}$ jsou navzájem inverzní.
2. Pro funkce z $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ tato nová definice Fourierovy transformace splývá s definicí původní.
3. Pokud $f \in \mathscr{L}_2$ a pokud
$$\hat{f}_n(\lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{U_n(0)} f(x) e^{-2\pi i(x,\lambda)} \, \mathrm{d}x,$$
pak platí $\hat{f} = \lim \hat{f}_n$ v prostoru $\mathscr{L}_2$.
4. Zobrazení $F : \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$ je isometrie.

Důkaz:

1. Jsou-li f_n, g_n dvě posloupnosti v $\mathscr{L}_2$, které obě konvergují v prostoru $\mathscr{L}_2$ k dané funkci $f \in \mathscr{L}_2$, pak zřejmě posloupnost $||f_n - g_n||_{\mathscr{L}_2}$ konverguje k nule. Z Parsevalovy rovnosti plyne totéž i pro posloupnost $||\hat{f}_n - \hat{g}_n||_{\mathscr{L}_2}$, takže limity posloupností $\hat{f}_n, \hat{g}_n$ v $\mathscr{L}_2$ jsou stejné.
2. Označme $\mathcal{F}(f)$, resp. $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ původní, resp. nový obraz f při Fourierově transformaci. Podle poznámky za větou o hustotě víme, že pro funkci $f \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ existuje posloupnost $f_n \in \mathscr{D}$, která konverguje k funkci f v prostoru $\mathscr{L}_1$ i $\mathscr{L}_2$. Pak ale pro všechna λ platí
$$\left| \mathcal{F}(f)(\lambda) - \hat{f}_n(\lambda) \right| = \| \mathcal{F}(f)(\lambda) - \widehat{f}_n(\lambda) \|_{\mathscr{L}_1} \leq ||f - f_n||_{\mathscr{L}_1}.$$
Tedy $\mathcal{F}(f)(\lambda)$ je bodová limita funkcí $\hat{f}_n(\lambda)$. Na druhou stranu, protože $\hat{f}_n$ konvergují v $\mathscr{L}_2$ k funkci $\tilde{\mathcal{F}}(f)$, lze vybrat podposloupnost konvergující skoro všude bodově k $\tilde{\mathcal{F}}(f)$. Tedy $\mathcal{F}(f) = \tilde{\mathcal{F}}(f)$ skoro všude.
3. Označme $f_k \stackrel{\mathrm{df}}{=} f \cdot \chi_{U_k(0)}$, kde $\chi_{U_k(0)}$ je charakteristická funkce kruhu. Funkce f_k konvergují k f v prostoru $\mathscr{L}_2$, neboť $||f - f_k||_{\mathscr{L}_2} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} |f|^2 \, \mathrm{d}x \to 0$ pro $k \to \infty$. Z Parsevalovy rovnosti plyne, že také funkce $\hat{f}_k$ konvergují v $\mathscr{L}_2$ k funkci $\hat{f}$.
4. Stačí použít definici a Parsevalovu rovnost limitou rozšířit na celé $\mathscr{L}_2$.

P o z n á m k a : Podobně jako tomu bylo u Fourierových řad, i pro Fourierovou transformaci lze dokázat věty o tom, jak souvisí hodnoty $f(x)$ s hodnotami funkce
$$g(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int e^{-2\pi i(x,\lambda)} \hat{f}(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Ukázkou je následující věta, jejíž důkaz nebudeme dělat (je možné jej najít v Kopáčkových skriptech).

Věta 58:
Nechť je funkce $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ po částech hladká. Pak pro každý bod $x \in \mathbb{R}$ platí

$$g(x) = \mathcal{F}_{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x) = [f(x+0) + f(x-0)]/2.$$

V tomto tvrzení je třeba integrál na levé straně brát ve smyslu hlavní hodnoty ($\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R}$).

P ř í k l a d : Řešení diferenciálních rovnic pomocí Fourierovy transformace.
Typické a velmi časté použití Fourierovy transformace je při řešení diferenciálních rovnic (obyčejných nebo parciálních), zejména pokud mají konstantní koeficienty (t.j. jsou invariantní vůči posunutí). Jako ukázku si ukážeme, jak se hledá partikulární řešení nehomogenní obyčejné diferenciální rovnice (s konstantními koeficienty).

Hledejme na $(-\infty, +\infty)$ řešení rovnice

$$y'' - y = e^{-x^2}.$$

Po použití Fourierovy transformace na obě strany rovnice dostaneme

$$\big[-(2\pi\lambda)^2 - 1\big]\hat{y} = \mathcal{F}\big(e^{-x^2}\big).$$

Tedy $\hat{y} = -[1 + (2\pi\lambda)^2]^{-1} \cdot \mathcal{F}\big(e^{-x^2}\big)$ a

$$y = -\mathcal{F}_{-1}\big([1 + (2\pi\lambda)^2]^{-1}\big) * e^{-x^2}.$$

Spočítat inversní Fourierovou transformaci z nepříliš složité racionální funkce lze snadno pomocí reziduové věty. Ihned z definice se snadno zjistí, že Fourierova transformace sudé funkce (proměnnné x) je zase funkce sudá (proměnné λ). Analogická věc platí i pro inversní Fourierovu tansformaci, stačí tedy v našem případě uvažovat jen kladná x a funkci rozšířit na celou reálnou osu jako sudou funkci. Pro $x > 0$ spočítáme $\int_{-\infty}^{\infty} [1 - (2\pi\lambda)^2]^{-1} e^{2\pi i x\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$ pomocí obvyklé integrace přes hranici velkého polokruhu v horní polorovině. Stačí spočítat

$$2\pi i \operatorname{res}_{i/2\pi} [1 + (2\pi\lambda)^2]^{-1} e^{2\pi i x\lambda} = 2\pi i [2(2\pi)^2 i]^{-1} (2\pi) e^{-x} = (1/2)e^{-x}.$$

Tedy $\mathcal{F}_{-1}\big([1 + (2\pi\lambda]^2]^{-1}\big) = (1/2)e^{-|x|}$ a

$$y = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

To, co jsme spočítali, je ve skutečnosti jedním speciálním případem obecného principu, jak najít partikulární řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Výsledkem je vždy konvoluce tzv. fundamentálního řešení s příslušnou pravou stranou. Pro porozumění těmto pojmům je však třeba teorie distribucí.

P ř í k l a d : Zkusme najít řešení rovnice pro vedení tepla

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t,x);\ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

s počáteční podmínkou $y(x,0) = f(x)$, kde f je daná funkce z prostoru $\mathscr{S}$. Řešení této úlohy popisuje šíření tepla v jednorozměrné nekonečné dlouhé tyči v závislosti na čase t, je-li rozložení tepla v čase 0 popsáno funkcí $f(x)$ (v realistické situaci je v rovnici ještě příslušná fyzikální konstanta úměrnosti, kterou jsme položili rovnou jedné). Použijeme Fourierovu transformaci $\mathcal{F}_x$ v proměnné x a označíme výslednou funkci $u(t,\lambda) = \mathcal{F}_x\big(y(t,x)\big)$. Pro funkci u dostaneme místo parciální diferenciální rovnice jen obyčejnou diferenciální rovnici, závisící na parametru λ

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\lambda) + 4\pi^2\lambda^2 u(t,\lambda) = 0$$

s počátečními podmínkami

$$u(0,\lambda) = \hat{f}(\lambda).$$

Tedy
$$u(t,\lambda) = \hat{f}(\lambda)e^{-4\pi^2\lambda^2 t}.$$
Použitím inverzní Fourierovy transformace dostaneme (násobení se převádí na konvoluci)
$$y(t,x) = f * u_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,\mathrm{d}y,$$
kde funkce u_t je funkce používaná v důkazu Schwartzovy věty. Při tomto důkazu jsem zároveň ukázali, že $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t,x) = f(x)$, tedy že naše řešení splňuje příslušnou počáteční podmínku.

15 Laplaceova transformace

§1. Definice

Nechť L je prostor všech měřitelných funkcí na $(0,\infty)$ takových, že $\int_0^\infty f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x$ existuje alespoň pro jedno $p \in \mathbb{C}$. Pak *Laplaceova transformace* $\mathscr{L}f$ je funkce komplexní proměnné p definovaná předpisem

$$(\mathscr{L}f)(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x.$$

Pro pohodlí budeme funkce f uvažovat na celém $\mathbb{R}$ s tím, že na $(-\infty,0)$ budou automaticky rovny 0. Pokud f,g jsou dvě funkce, které se rovnají skoro všude, pak Laplaceovy transformace funkcí f a g jsou stejné. Budeme tedy (jako obvykle v prostorech $\mathscr{L}_1$ nebo $\mathscr{L}_2$) brát f jako třídu ekvivalence funkcí, které se rovnají skoro všude.

Poznámka: Laplaceova transformace je zřejmě varianta Fourierovy transformace, $\big(\mathscr{L}f\big)(p)$ je Fourierova transformace funkce $f(x)e^{-\operatorname{Re} px}$ v bodě ip, nebo se dá též chápat jako Fourierova transformace f v komplexním bodě $\operatorname{Im} p$. Díky tomu lze hodně vlastností Laplaceovy transformace odvodit z vlastností Fourierovy transformace. Laplaceova transformace se často používá pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

Na začátek je třeba si rozmyslet, jak vypadají definiční obory obrazů $\mathscr{L}f$ v komplexní rovině. Ukážeme, že to nejsou libovolné množiny, ale vždy poloroviny, ohraničené svislou přímkou. Trochu tato vlastnost připomíná poloměr konvergence mocniné řady. Laplaceova transformace je funkce holomorfní v příslušné polorovině, jak uvidíme za chvíli. Je vhodné si uvědomit, že to neznamená, že tuto holomorfní funkci již nelze holomorfně prodloužit na větší množinu v komplexní rovině. Znamená to jen, že předpis zadávající tuto funkci jako integrál závisející na parametru nelze použít v jiných bodech.

Věta 59:
Pro každou funkci $f \in L$ existuje právě jedno číslo $c = c_f \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ takové, že $\mathscr{L}f$ je definovaná na poloprostoru $R_c = \{p \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Re} p > c\}$ a není definovaná na doplňku jeho uzávěru. Samotná hraniční přímka buď celá do definičního oboru patří, nebo tam celá nepatří.

Důkaz: Svislé přímky buď celé do definičního oboru patří, nebo celé nepatří, neboť $|e^{-px}| = e^{-\operatorname{Re} px}$. Pokud jedna svislá přímka $\operatorname{Re} p = \alpha$ do definičního oboru patří, obsahuje s ní definiční obor také celou polorovinu napravo od ní, neboť pro všechna $p, \operatorname{Re} p > \alpha$ a $x > 0$ je $|e^{-px}| \le e^{-\alpha x}$. Číslo c_f je tedy infimum všech α, pro které příslušná svislá přímka do definičního oboru $\mathscr{L}f$ patří.

Věta 60:

1. $\mathscr{L}f$ je holomorfní na polorovině $\operatorname{Re} p > c_f$.
2. $\mathscr{L}f$ konverguje k nule pro $\operatorname{Re} p \to +\infty$, a to stejnoměrně vůči $ip \in \mathbb{R}$.
3. Pro $\operatorname{Re} p$ pevné platí $\lim_{ip \to \pm\infty} \mathscr{L}f(p) = 0$.
4. Pro každé k přirozené existuje k-tá derivace funkce $\mathscr{L}f^{(k)}$ a platí
$$\big(\mathscr{L}f\big)^{(k)} = \mathscr{L}\big((-1)^k x^k f(x)\big).$$
5. Zobrazení $\mathscr{L}$ je prosté.

Důkaz:

1. Zvolme $\varepsilon > 0$ pevné a označme $K = \sup_{x>0} xe^{-\varepsilon x}$. Nechť $p = u + iv$. Pak funkce $K|f(x)|e^{-(c_f+\varepsilon)x}$ je integrovatelná majoranta pro derivace integrandu $f(x)e^{-px}$ podle u, nebo podle v na množině všech p, pro které $\operatorname{Re} p > c_f + 2\varepsilon$. Lze tedy počítat derivace $\mathscr{L}f$ podle u, v záměnou integrace a derivace. Integrand je zřejmě holomorfní v p, tedy totéž platí i pro $\mathscr{L}f$.
2. Pro každé $\alpha > c_f$ je funkce $|f(x)|e^{-\alpha x}$ integrovatelná majoranta pro integrand v Laplaceově transformaci na množině všech p, pro které $\operatorname{Re} p \ge \alpha$. Navíc $e^{-\alpha x} \to 0$ pro $\alpha \to \infty$, tedy stačí použít větu o spojité závislosti integrálu na parametru.
3. Stačí použít Riemann–Lebesgueovo lemma pro Fourierovu transformaci.

4. Komplexní derivace funkce $\mathscr{L}f$ je rovna parciální derivaci $\mathscr{L}f$ podle u a ta se rovná

$$\int_0^\infty f(x)(-x)e^{-(u+iv)x}\,\mathrm{d}x = \mathscr{L}\big((-x)f(x)\big)(p).$$

Tvrzení plyne indukcí podle k.

5. Plyne z vět o Fourierově transformaci.

Příklad:

1. $(\mathscr{L}(1))(p) = \int_0^\infty e^{-px}\,\mathrm{d}x = 1/p$. Funkce $\mathscr{L}f$ je definovaná pro $\mathrm{Re}\,p > 0$ a lze ji holomorfně prodloužit na celou komplexní rovinu bez počátku.
2. $\mathscr{L}(e^{\alpha x}) = 1/(p-\alpha)$. Definiční obor je $\{p|\,\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha.\}$
3. Nechť $s \in \mathbb{C}$. Funkce $\mathscr{L}(x^s)(p)$ je holomorfní na $\mathrm{Re}\,p > 0$. Pro p kladná je snadné ji spočítat:

$$\int_0^\infty e^{-px}x^s\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-y}y^s p^{-s-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{p^{s+1}}\int_0^\infty e^{-y}y^s\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}}.$$

Pokud budeme definovat jednoznačnou větev mocniny p^{s+1} na polorovině $\mathrm{Re}\,p > 0$ předpisem

$$p^{s+1} = |p|^{s+1}e^{-i(s+1)\arg_{-\pi} p},\ \arg_{-\pi} p \in (-\pi,\pi),$$

pak levá i pravá strana nahoře jsou holomorfní funkce na množině, kde $\mathrm{Re}\,p > 0$ a rovnají se na kladné reálné ose. Podle věty o jednoznačnosti se tedy rovnají v celém příslušném poloprostoru. I tuto funkci lze holomorfně prodloužit na celou komplexní rovinu bez záporné reálné osy. V záporných celých číslech má Γ funkce póly, do nich funkci prodloužit nelze. V ostatních bodech záporné reálné osy má funkce skoky a její prodlužování by vedlo na víceznačnou funkci.

§2. Základní fakta o Laplaceově transformaci

Věta 61:

1. Laplaceova transformace je lineární zobrazení, t.j.

$$\mathscr{L}\left(\sum_{j=1}^k a_j f_j\right) = \sum_{j=1}^k a_j \mathscr{L}(f_j); \qquad a_j \in \mathbb{C};\ f_j \in L.$$

2. Substituce. Pro libovolnou funkci $f \in L$ platí

$$\big[\mathscr{L}\big(f(\alpha x)\big)\big](p) = \frac{1}{\alpha}\big[\mathscr{L}\big(f(x)\big)\big](p/\alpha), \qquad \alpha > 0.$$

3. Translace. Nechť $f \in L$. Pro $a > 0$ označíme symbolem f_a 'posunutou' funkci $f_a(x) = f(x-a)$, $x > a$; $f_a(x) = 0, x < a$. Pak

$$\big[\mathscr{L}(f_a)\big](p) = e^{-pa}\big[\mathscr{L}f\big](p); \qquad \mathrm{Re}\,p > c_f.$$

Naopak, pro libovolné $a \in \mathbb{C}$ platí

$$\big[\mathscr{L}\big(e^{ax}f(x)\big)\big](p) = \big[\mathscr{L}f\big](p-a).$$

4. Derivace.

A. Nechť f má k spojitých derivací (v 0 jednostranné derivace) a $f^{(k)} \in L$, pak

$$\big[\mathscr{L}(f^{(k)})\big](p) = p^k\big[\mathscr{L}(f)\big](p) - \sum_{j=0}^{k-1} p^j f^{(k-1-j)}(0).$$

B. Pro $f \in L$ platí

$$\big[\mathscr{L}(f)\big]^{(k)}(p) = \big[\mathscr{L}\left((-1)^k x^k f(x)\right)\big](p).$$

5. Integrace.

   A. Nechť $f \in L$, pak existuje primitivní funkce $F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$, funkce F patří do L, platí $c_F \leq c_f$ a

$$\big[\mathscr{L}(F)\big](p) = \frac{1}{p}\big[\mathscr{L}(f)\big](p); \qquad \operatorname{Re} p > c_f.$$

   Obecněji, pokud

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_0^{x_1} \dots \left(\int_0^{x_{k-1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x_k\right)\mathrm{d}x_{k-1}\right)\dots \mathrm{d}x_1,$$

   pak

$$\big[\mathscr{L}(F)\big](p) = \frac{1}{p^k}\big[\mathscr{L}f\big](p).$$

   B. Nechť funkce $f(x), f(x)/x$ patří do L, pak funkce $G(p) = -\big[\mathscr{L}\big(f(x)/x\big)\big](p)$ je primitivní k funkci $[\mathscr{L}(f)](p)$ (tam, kde jsou obě definované). Mezi všemi primitivními funkcemi k $\big[\mathscr{L}(f)\big](p)$ je $G(p)$ charakterizovaná vlastností $\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} G(p) = 0$.

6. Konvoluce. Předpokládejme, že $f_1, f_2 \in L$. Pak $f_1 * f_2$ patří také do L a platí

$$\big[\mathscr{L}(f_1 * f_2)\big](p) = \big[\mathscr{L}(f_1)\big](p)\cdot\big[\mathscr{L}(f_2)\big](p),\ c_{f_1*f_2} = \max(c_{f_1}, c_{f_2}).$$

7. Násobení. Nechť f_1, f_2 jsou po částech hladké funkce z prostoru L. Pak pro $\xi > \max\{c_{f_1}, c_{f_2}\}$ platí

$$\big[\mathscr{L}(f_1\cdot f_2)\big](p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \big[\mathscr{L}(f_1)\big](p-q)\big[\mathscr{L}(f_2)\big](q)\,\mathrm{d}q.$$

Důkaz:

1. Triviální.
2. Stačí udělat substituci $\tau = \alpha t$.
3. Opět definice a jednoduchá substituce.
4. A. Stačí pro $k = 1$:

$$\big[\mathscr{L}(f')\big](p) = \int_0^N f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[[e^{-pt}f(t)]_0^N + p\int_0^N e^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t\right] = -f(0^+) + p\big[\mathscr{L}(f)\big](p).$$

   B. Dokázali jsme již dřív.

5. A. Stačí si uvědomit, že funkce F patří do prostoru L, t.j. že $e^{-c_f t}\int_0^t f(\tau)d\tau$ je integrovatelná. Ale to plyne z Fubiniovy věty:

$$\int_0^\infty e^{-c_f t}\left(\int_0^t |f(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty |f(\tau)|d\tau\left(\int_\tau^\infty e^{-c_f t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty |f(\tau)|[e^{-c_f\tau}/c_f]\,\mathrm{d}\tau < +\infty.$$

   Pak stačí použít tvrzení o Laplaceově transformaci derivace.

   B. Nechť c je takové, že na polorovině $\operatorname{Re} p > c$ jsou definovány oba obrazy $\mathscr{L}(f)$ a $\mathscr{L}\big(f(x)/x\big)$. Funkce $I(p) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ je tedy v této polorovině holomorfní a její derivace je

$$I'(p) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\frac{d}{dp}(e^{-pt})\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = -\big[\mathscr{L}(f)\big](p).$$

6. Přestože funkce f_1, f_2 nejsou obecně integrovatelné, jejich konvoluce $f_1 * f_2$ existuje, má pro $t > 0$ hodnotu $\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ a pro $t \leq 0$ je rovna nule (to plyne z toho, že funkce z prostoru L jsou nulové pro záporné t). Předpokládejme, že c je takové, že obě funkce $f_i(t)e^{-ct}$, $i = 1, 2$ jsou integrovatelné. Pak z věty (51) plyne, že jejich konvoluce je také integrovatelná. Tato konvoluce je ale rovna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)e^{-c(t-\tau)}f_2(\tau)e^{-c(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)e^{-ct}\,\mathrm{d}\tau = [f_1 * f_2](t)e^{-ct},$$

tedy $f_1 * f_2$ patří do L. Pomocí Fubiniovy věty dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1 * f_2](t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right) e^{-pt}\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)e^{-p\tau}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau = \big[\mathscr{L}(f_1)\big](p)\big[\mathscr{L}(f_2)\big](p).$$

7. Nebudeme dokazovat.

§3. Věty o inverzi

Poznámka : Podobně jako pro Fourierovu transformaci, i pro Laplaceovu transformaci je prostor funkcí L, na kterém je definována, nevhodný. Důvodem je opět fakt, že nelze dobře charakterizovat prostor obrazů. Při používání Laplaceovy transformace je ale třeba používat inverzní Laplaceovu transformaci a tak je nutné najít aspoň nějaké vhodné postačující podmínky pro to, aby nějaká funkce byla obrazem při Laplaceově transformaci, ev. naučit se příslušný vzor najít. Takováto tvrzení se obvykle nazývají věty o inverzi.

Věta 62:
Nechť $f \in L$ a nechť f má navíc po částech spojité derivace na $\mathbb{R}$. Označme $f(t \pm 0) = \lim_{\tau \to t^{\pm}} f(\tau)$. Pak platí pro každé $t \in \mathbb{R}$ a každé $\xi > c_f$

$$[f(t+0) + f(t-0)]/2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} \big[\mathscr{L}(f)\big](p)e^{pt}\,\mathrm{d}p,$$

kde křivka γ_ξ je svislá přímka $\{p|\operatorname{Re} p = \xi\}$. Příslušný křivkový integrál je třeba chápat jako hlavní hodnotu, t.j.

$$\int_{\gamma_\xi} F(p)\,\mathrm{d}p = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{\xi,R}} F(p)\,\mathrm{d}p,$$

a $\gamma_{\xi,R}$ je úsečka $\{p|\operatorname{Re} p = \xi, ip \in \langle -R, R\rangle\}$.

Důkaz: Je to důsledek analogické věty (58) o Fourierově transformaci (kterou jsme nedokazovali). Víme totiž, že je-li $p = \xi + i\eta$, ξ pevné, pak

$$F(p) = \big[\mathscr{L}f\big](p) = \mathcal{F}[f(x)e^{-\xi x}]\left(\frac{\eta}{2\pi}\right) \equiv F_\xi(\eta).$$

Podle věty (58) dostaneme

$$e^{-\xi t}[(f(t+0) + f(t-0))/2] = \mathcal{F}_{-1}\big(\mathcal{F}_\xi(2\pi\eta)\big),$$

kde integrál v definici $\mathcal{F}_{-1}$ je třeba chápat ve smyslu hlavní hodnoty. Tedy

$$\frac{1}{2}\big[f(t+0) + f(t-0)\big] = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} F_\xi(2\pi\eta)e^{2\pi i\eta t}e^{\xi t}\,\mathrm{d}\eta =$$
$$= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{(\xi+i\eta')t}F_\xi(\eta')\,\mathrm{d}\eta' = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{\xi,R}} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

P o z n á m k a : Je vhodné mít aspoň nějaké postačující podmínky, které by zaručovaly, že jistý typ funkcí leží v obraze Laplaceovy transformace. Zároveň si dokážeme větu o inverzní Laplaceově transformaci alespoň pro jistou, užší třídu funkcí. Jako přípravu pro to si dokážeme silnější verzi Jordanova lemmatu.

Věta 63: Jordanovo lemma znovu
Nechť ξ a $t > 0$ jsou pevná reálná čísla. Nechť $F(p)$ je omezená v polorovině $P_\xi = \{p|\,\mathrm{Re}\,p \le \xi\}$ a platí

$$\lim_{p\to\infty, p\in P_\xi} F(p) = 0.$$

Nechť A, B jsou kladná čísla, označme $O \equiv O_{A,B}$ čtverec ležící v polorovině P_ξ, jehož 2 sousední vrcholy jsou v bodech $\xi + iA, \xi - iB$ (nakreslete si!). Označme $\gamma_{A,B}$ cestu tvořenou kladně orientovanou hranicí ∂O čtverce O, ze které vynecháme hranu ležící na přímce $\mathrm{Re}\,p = \xi$. Pak

$$\lim_{A,B\to+\infty} \int_{\gamma_{A,B}} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p = 0.$$

Analogické tvrzení platí i pro $t < 0$ a pro polorovinu ležící napravo od přímky $\mathrm{Re}\,p = \xi$.

Důkaz: Křivka $\gamma_{A,B}$ je součet tří hran čtverce:

$$\gamma_1(s) = s + iA,\ \gamma_3(s) = s - iB,\ s \in \langle -A - B + \xi, \xi\rangle;$$
$$\gamma_2(s) = -A - B + is,\ s \in \langle -B, A\rangle, \qquad \gamma_{A,B} = -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3.$$

Všechny křivky γ_i závisí na A, B, i když to není v jejich označení explicitně uvedeno. Příslušné integrály je možné odhadnout takto:

$$\left|\int_{\gamma_1} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p\right| \le \max_{\gamma_1} |F(p)| \int_{-A-B+\xi}^{\xi} e^{st}\,\mathrm{d}s = \max_{\gamma_1} |F(p)| \frac{1}{t} e^{\xi t}[1 - e^{-(A+B)t}].$$

Z předpokladů věty plyne, že $\max_{\gamma_1} |F(p)|$ se blíží k nule pro $A \to +\infty$, tedy i celý integrál přes γ_1 má limitu nulovou pro $A \to +\infty$.

Přesně stejný odhad platí i pro integrál přes křivku γ_3. Tentokrát $\max_{\gamma_3} |F(p)|$ se blíží k nule pro $B \to +\infty$, tedy i celý integrál přes γ_3 má limitu nulovou pro $B \to +\infty$.

Konečně poslední integrál přes γ_2 se odhadne takto (podle předpokladů věty je funkce F omezená, předpokládejme, že $|F(p)| \le K$ pro $p \in P_\xi$):

$$\left|\int_{\gamma_2} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p\right| \le K \int_{-B}^{A} e^{-(A+B-\xi)t}\,\mathrm{d}s = K(A+B)e^{-(A+B)t} e^{\xi t}.$$

Zřejmě se tedy integrál přes γ_2 blíží k nule pro $A + B \to +\infty$.

Věta 64:
Nechť existuje $c > 0, A > 0$ takové, že funkce $F(p)$ je holomorfní v polorovině $\mathrm{Re}\,p > c$ a pro body této poloroviny platí odhad

$$|F(p)| \le \frac{A}{|p|^2}.$$

Zvolme číslo $\xi > c$ a označme stejně jako ve větě (58) symbolem γ_ξ svislou přímku $\mathrm{Re}\,p = \xi$.

Potom je funkce

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\xi} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p$$

vzorem funkce $F(p)$ při Laplaceově transformaci. Integrál v tomto vzorci je definován stejně jako ve větě (58).

Funkce $f(t)$ je spojitá na celé reálné ose, rovná se nule pro $t \le 0$ a má v $+\infty$ nejvýše exponenciální růst, t.j. existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že $|f(t)| \le \alpha e^{\beta t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Nejdříve dokážeme, že integrál definující funkci $f(t)$ konverguje a že funkce $f(t)$ má nejvýše exponenciální růst v $+\infty$. To plyne z odhadu

$$|f(t)| \le \frac{1}{2\pi} A\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\eta}{\xi^2 + \eta^2}\right) e^{\xi t}.$$

Díky tomu, že funkce $e^{\xi T}\frac{A}{\xi^2+\eta^2}$ je integrovatelná majoranta na intervalu $|t| \le T$, lze použít větu o spojitosti integrálu, závisejícího na parametru a funkce $f(t)$ je tedy spojitá na $\mathbb{R}$.

Dále ukážeme, že hodnota integrálu v definici funkce $f(t)$ nezávisí na volbě ξ, $\xi > c$. Nechť ξ_1, ξ_2; $c < \xi_1 < \xi_2$ jsou dvě taková čísla, $R > 0$ a O je obdélník, $O = \{p = \xi + i\eta | \xi_1 < \xi < \xi_2, |\eta| < R\}$. Podle Cauchyovy věty je integrál $\int_{\partial O} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p$ roven nule a integrály po vodorovných úsečkách lze odhadnout číslem

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{A}{\xi^2+R^2} e^{\xi t}\,\mathrm{d}\xi,$$

které konverguje k nule pro $R \to +\infty$. Limitním přechodem tedy dostaneme, že hodnoty integrálu definující $f(t)$ jsou stejné pro ξ_1 a ξ_2.

Je-li nyní $t < 0$, pak je limita

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int_{\gamma_\xi} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p = 0,$$

(viz odhady pro $|f(t)|$ výše), nezávislost na volbě ξ tedy znamená, že $f(t) = 0$, $t < 0$.

Nakonec ještě ukážeme, že $\mathscr{L}(f(t))(p) = F(p)$ pro $p, \operatorname{Re} p > c$. Zvolme jedno takové p a zvolme k němu ξ, $c < \operatorname{Re}\xi < \operatorname{Re} p$. Pak

$$[\mathscr{L}(f)](p) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_{\gamma_\xi} e^{p't}F(p')\,\mathrm{d}p'\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} F(p')\left(\int_0^{+\infty} e^{-(p-p')t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}p' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} F(p')\frac{\mathrm{d}p'}{p-p'}.$$

K výpočtu posledního integrálu lze použít residuovou větu a Jordanovo lemma pro čtverec O v polorovině *napravo* od svislé přímky $\{p | \operatorname{Re} p = \xi\}$. Předpokládejme, že levá svislá strana čtverce je úsečka $\{p | \operatorname{Re} p = \xi, |ip| \le R\}$, kde $R > 0$. Pro R dost velké je integrál přes *záporně orientovanou* hranici čtverce roven

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\partial O} F(p')\frac{\mathrm{d}p'}{p-p'} = \frac{1}{2\pi i}(-1)2\pi i \operatorname{res}_p \frac{F(p')}{p-p'} = F(p).$$

Limitním přechodem $R \to +\infty$ dostaneme žádané tvrzení.

Příklad: Nechť $R(p)$ je racionální funkce, t.j. $R(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ a předpokládejme, že st. $P \le$ st. $Q - 2$. Pak $R(p) = [\mathscr{L}(f)](p)$, kde $f(t)$ je nulová pro $t < 0$ a pro $t > 0$ je dána vzorcem

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{p_j} R(p)e^{pt},$$

kde $p_1, \dots, p_k$ jsou kořeny polynomu $Q(p)$ (předpokládáme, že P a Q nemají žádný společný kořenový činitel). K odůvodnění stačí použít větu (64) a Jordanovo lemma [věta (63)].

Příklad: Nechť $a, b \in (0, +\infty) : a < b$. Zkusme najít vzor funkce $F(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ při Laplaceově transformaci. Podle předchozího příkladu je třeba spočítat

$$\sum_u \operatorname{res}_u \left[\frac{e^{pt}}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\right], \quad t > 0$$

kde součet je přes čtyři jednonásobné póly $\{\pm ia, \pm ib\}$ jmenovatele. Funkce $\tilde{F}(p) = e^{pt}F(p)$ má komplexně sdružené hodnoty v komplexně sdružených bodech:

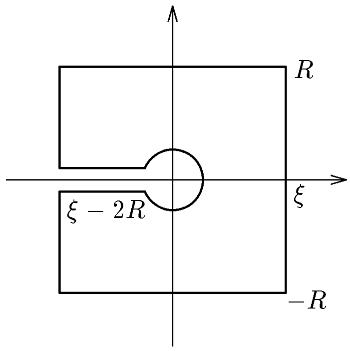
$$\tilde{F}(\overline{p}) = \overline{\tilde{F}(p)}.$$

Z toho plyne, že součet reziduí v komplexně sdružených bodech je dvojnásobek jejich společné reálné části. Víme, že

$$\operatorname{res}_{ia} \tilde{F}(p) = \lim_{p\to ia} \frac{e^{pt}(p-ia)}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} = \frac{e^{iat}}{2ia(b^2-a^2)},$$

podobně

$$\operatorname{res}_{ib} \tilde{F}(p) = \frac{e^{ibt}}{2ib(a^2-b^2)}.$$



Obrázek 25: Integrační křivka γ.

Hledaným vzorem je tedy funkce

$$f(t) = \frac{b \sin at - a \sin bt}{ab(b^2 - a^2)}, \ t > 0.$$

Příklad: Pokud racionální funkce R je taková, že stupeň polynomu P je jen o jedničku nižší než stupeň polynomu Q, pak lze dokázat (nebudeme to dělat) podobný vzorec pro vzor při Laplaceově transformaci. Pro $t > 0$ platí

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{p_j} \frac{R(p)}{p} e^{pt}.$$

Pro $t < 0$ je funkce nulová, v bodě 0 funkce $f(t)$ nemusí být spojitá.

V jednotlivých konkrétních případech je možné příslušný vzor najít pomocí vět o Laplaceově transformaci derivace. Zkusme to na konkrétním příkladě. Nechť $F(p) = \frac{p+1}{p^2-2p+1}$. Zkusme nejdřív najít vzor funkce $G(p) = \frac{p+1}{p(p^2-2p+1)}$. Pro ni lze použít výše uvedený postup a funkce $g(t)$ se rovná pro $t > 0$

$$g(t) = \operatorname{res}_1 G(p)e^{pt} + \operatorname{res}_0 G(p)e^{pt} = e^t - 2e^t + 2te^t + 1.$$

Pro funkci $f(t) = g'(t) = (1 + 2t)e^t$ tedy platí

$$[\mathscr{L}(f)](p) = p[\mathscr{L}(g)](p) = F(p).$$

Je snadné také ověřit, že výše uvedený obecný vzorec (který jsme nedokázali) dá tutéž odpověď.

Příklad: Nechť $\alpha > 0$. Zkusme najít vzor funkce $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$, definovné na celé rovině $\mathbb{C}$ kromě záporné reálné poloosy a $\sqrt{p}$ je definována jako $\exp(\frac{1}{2} \ln_{-\pi} p)$.

Chceme tedy vypočítat pro $\xi > 0$ integrál $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\xi} e^{pt} F(p) \, \mathrm{d}p$. Definujme křivky ($R > 0$ dost velké)

$$\gamma_1(s) = \xi + is, \ s \in \langle -R, R\rangle; \qquad \gamma_2(s) = s + iR, \ s \in \langle \xi - 2R, \xi\rangle;$$
$$\gamma_3(s) = \xi - 2R + is, \ s \in \langle 0, R\rangle; \quad \gamma_4^{\pm}(s) = s, s \in \langle \xi - 2R, -\varepsilon\rangle; \quad \gamma_5(s) = \varepsilon e^{is}, \ s \in \langle -\pi, \pi\rangle;$$
$$\gamma_6(s) = \xi - 2R + is, \ , s \in \langle -R, 0\rangle; \qquad \gamma_7(s) = s - iR, \ s \in \langle \xi - 2R, \xi\rangle.$$

Křivka $\gamma_4^{\pm}$ je chápána jako limita seshora pro znaménko $+$ a limita zespoda pro znaménko $-$. Budeme počítat limitu pro $R \to +\infty$ integrálu

$$\int_\gamma e^{tp} F(p) \, \mathrm{d}p; \qquad \gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4^+ - \gamma_5 - \gamma_4^- - \gamma_6 + \gamma_7.$$

Podle Jordanova lemmatu (věta (63)) je

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_6 + \gamma_7} e^{pt} F(p) \, \mathrm{d}p = 0.$$

Limitu z integrálu přes malou lze spočítat explicitně:

$$\int_{\gamma_5} e^{pt}(p)\,\mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t\varepsilon e^{is}} e^{-\alpha\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{d}s,$$

a limitním přechodem za integračním znamením dostaneme, že limita pro $\varepsilon \to 0^+$ je rovna 1.

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0^+, R \to +\infty$ dostaneme pro integrál přes $\gamma_4^{\pm}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1}{x}[e^{i\sqrt{x}\alpha} - e^{-i\sqrt{x}\alpha}]\right)\mathrm{d}x$$

Celkem tedy dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} e^{pt}F(p)\,\mathrm{d}p = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin\alpha\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Substitucí $y = \sqrt{x}$ dostaneme

$$I(t) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin\alpha\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ty^2}\sin\alpha y}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Tento integrál je možné dále upravit pomocí $\sin(\alpha y)/y = \int_0^\alpha \cos\beta y\,\mathrm{d}\beta$ a pomocí Fubiniovy věty:

$$I(t) = 2\int_0^\alpha\left(\int_0^{+\infty} e^{-ty^2}\cos\beta y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\beta = \mathrm{Re}\left[\mathcal{F}\big(e^{-ty^2}(\beta/2\pi)\big)\right].$$

Využitím toho, co víme o Fourierových obrazech Gaussovy funkce dostaneme nakonec

$$I(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^\alpha e^{-\beta^2/4t}\,\mathrm{d}\beta, \qquad \text{a} \qquad f(t) = 1 - \phi(\alpha/2\sqrt{t});\ \phi(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^u e^{-s^2}\,\mathrm{d}s.$$

Všimněte si, že $f(t)$ je spojitá v bodě 0.

§4. Použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic

P o z n á m k a : Princip použití je podobný jako pro Fourierovu transformaci. Laplaceova transformace bývá výhodnější pro hledání řešení se zadanými počátečnímmi podmínkami.

P ř í k l a d : Najděme řešení rovnice

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = e^{\alpha t}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$. Použitím Laplaceovy transformace dostaneme pro obraz $Y = \mathscr{L}(y)$ vztah

$$(p^4 + 2p^2 + 1)Y(p) = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad \text{a tedy} \qquad y(t) = \sum \mathrm{res}\,\frac{e^{pt}}{(p-\alpha)(p^4+2p^2+1)}, \quad t > 0.$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$y(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1} + \frac{1}{2(1+\alpha^2)^2}\big\{\cos t\big[\alpha t(\alpha^2 - 1) + 2\alpha(t+\alpha)\big] - \sin t\big[(1-\alpha^2)(t+\alpha) + 2\alpha^2 t\big]\big\}.$$

Je také možné napsat $Y(p)$ jako součin

$$Y(p) = \frac{1}{p^4 + 2p^2 + 1}\cdot\frac{1}{p-\alpha},$$

vypočítat

$$\left[\mathscr{L}_{-1}\left(\frac{1}{p^4+2p^2+1}\right)\right](t) = \frac{1}{2}[\sin t - t\cos t]$$

a napsat $y(t)$ ve tvaru konvoluce

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}[\sin\tau - \tau\cos\tau]\,\mathrm{d}\tau.$$

Obsah

Kapitola 12, Fourierovy řady . . . 3
§0 Úplné ortonormální posloupnosti . . . 3
§1 Abstraktní Fourierovy řady . . . 8
§2 Bodová konvergence Fourierových řad . . . 13

Kapitola 13, Funkce komplexní proměnné . . . 20
§0 Riemannova sféra . . . 20
§1 Projektivní prostor . . . 21
§2 Möbiova grupa lineárních lomených zobrazení . . . 22
§3 Holomorfní funkce . . . 25
§4 Cauchy–Riemannovy podmínky . . . 26
§5 Exponenciála, logaritmus a obecná mocnina . . . 28
§6 Komplexní diferenciální formy a Stokesova věta . . . 32
§7 Cauchyova věta . . . 34
§8 Taylorovy řady . . . 36
§9 Laurentovy řady . . . 37
§10 Klasifikace izolovaných singularit . . . 39
§11 Reziduová věta . . . 41
§12 Výpočty integrálů pomocí reziduové věty . . . 46
§13 Singularity v nekonečnu . . . 57
§14 Důsledky Cauchyova vzorce . . . 60
§15 Analytické pokračování holomorfní funkce . . . 64
§16 Gamma funkce — $\Gamma(z)$ . . . 64
§17 Konformní zobrazení . . . 66
§18 Globální Cauchyova věta . . . 67

Kapitola 14, Fourierova transformace . . . 72
§0 Základní pojmy . . . 72
§1 Schwartzův prostor rychle klesajících hladkých funkcí — $\mathscr{S}$ . . . 73
§2 Fourierova transformace na $\mathscr{L}_2$. . . . 76

Kapitola 15, Laplaceova transformace . . . 80
§0 Definice . . . 80
§1 Základní fakta o Laplaceově transformaci . . . 81
§2 Věty o inverzi . . . 83
§3 Použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic . . . 87